Grafi, igre in še kaj

Martin Milanič
martin.milanic@upr.si

Inštitut Andrej Marušič
Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije
Univerza na Primorskem, Koper

Matematika je kul 2016, UP FAMNIT, Koper, 23. avgust 2016

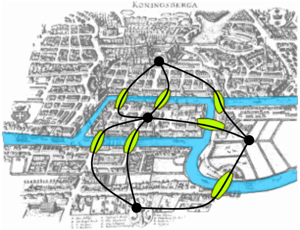
Predvidene vsebine delavnic

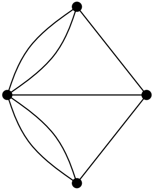
- 1. ura: osnovne definicije in zgledi – grafi kot modeli
- 2. ura: lema o rokovanju,
  konstrukcija regularnih grafov s poljubnimi induciranimi podgrafi
- 3. ura: prirejanja v dvodelnih grafih, Hallov izrek
  problem stikal in luči, liha dominacija v grafih
- 4. ura: razcepi grafov in domneva Ringela in Kotziga o ljubkih označitvah dreves
- 5. ura: igra NIM, digrafi in jedra

Kaj je graf?

Kaj je graf?

Rojstvo teorije grafov:
problem königsberških mostov, Leonhard Euler, 1736





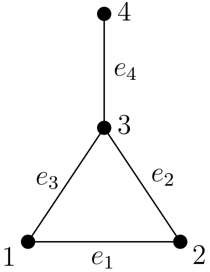
Vir: https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Bridges_of_Königsberg

Kaj je graf?

Definicija

Graf *G je trojica, ki sestoji iz* **množice točk (ali: vozlišč)** *$V(G)$,* **množice povezav** *$E(G)$ in relacije, ki vsaki povezavi priredi dve (ne nujno različni) točki, ki jima rečemo* **krajišči** *povezave.*

Zgled:
$V(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$



Prireditev krajišč povezavam je razvidna s slike.

Zanka je povezava, ki ima enaki krajišči.

Dve povezavi sta **vzporedni**, če imata isti par krajišč.

Graf je **enostaven**, če nima zank in vzporednih povezav.

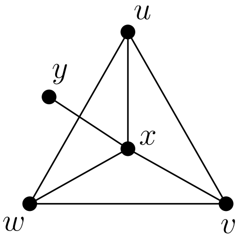
Enostaven graf je enolično določen z urejenim parom (V, E)*, kjer je* V *množica točk in* $E \subseteq \binom{V}{2}$ *(2-elementne podmnožice* V*) je množica povezav.*

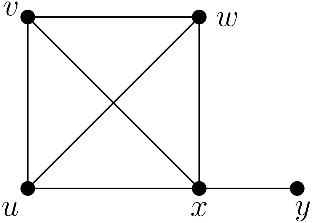
Oznaka: $V(G) = V$, $E(G) = E$.

$e = \{u, v\} \in E$: pišemo $e = uv$ $(= vu)$

Za točki u in v, ki sta krajišči neke povezave, pravimo, da sta **povezani** ali **sosednji**.

Zgled: Dve risbi istega (enostavnega) grafa:





Grafi kot modeli

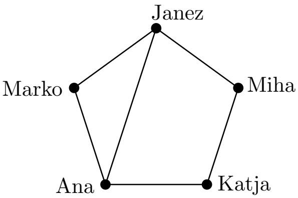
Grafi so uporabni na različnih področjih.

Zgled: *Poznanstva, klike in neodvisne množice.*

Ali vsaka množica šestih ljudi vsebuje tri ljudi, ki se paroma poznajo, ali pa tri ljudi, ki se paroma ne poznajo?

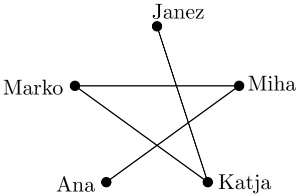
Relacija "poznanstva" je simetrična, torej jo lahko modeliramo z enostavnimi grafi.

Relacija "nepoznanstva" na isti množici ustreza še enemu grafu s "komplementarno" množico povezav.



G

relacija "poznanstva"



$\overline{G}$

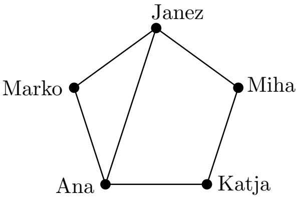
relacija "nepoznanstva"

Definicija

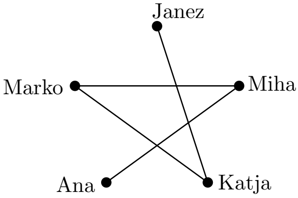
Komplement $\overline{G}$ *enostavnega grafa* G *je tak enostaven graf z množico točk* $V(G)$, *da velja* $uv \in E(\overline{G})$ *če in samo če* $uv \notin E(G)$.

Klika v grafu je množica paroma povezanih točk.

Neodvisna množica v grafu je množica paroma nepovezanih točk.



G
relacija "poznanstva"



$\overline{G}$
relacija "nepoznanstva"

V zgornjem primeru je
$\{$Ana, Janez, Marko$\}$ klika velikosti 3,
$\{$Katja, Janez$\}$ neodvisna množica velikosti 2.

To sta največji taki množici.

Zgornje vprašanje lahko sedaj zastavimo na naslednji način:

Ali vsak graf na šestih točkah vsebuje kliko velikosti 3 *ali neodvisno množico velikosti* 3*?*

Odgovor je pritrdilen.

Posplošitve tega dejstva študira t.i. *Ramseyjeva teorija*.

Zgled: *Razvrščanje kandidatov na delovna mesta in dvodelni grafi.*

V podjetju moramo zapolniti m delovnih mest, za katera imamo na voljo n kandidatov.

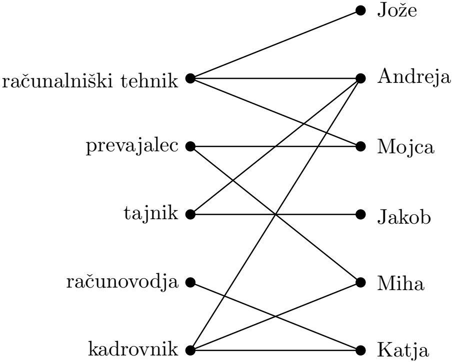
Vsak od kandidatov je kvalificiran le za nekatera delovna mesta.

Ali lahko vsa delovna mesta zapolnimo s kvalificiranimi kandidati?

Problem lahko modeliramo z enostavnim grafom H, ki ima delovna mesta in kandidate za točke.

Delovno mesto d je povezano s kandidatom k, če je kandidat k kvalificiran za delovno mesto d.

Zgled:



Jože
računalniški tehnik
Andreja
prevajalec
Mojca
tajnik
Jakob
računovodja
Miha
kadrovnik
Katja

Vsako delovno mesto mora biti zapolnjeno z natanko enim kandidatom in vsakemu kandidatu lahko dodelimo kvečjemu eno delovno mesto.

Iščemo torej množico m paroma disjunktnih povezav v grafu H.

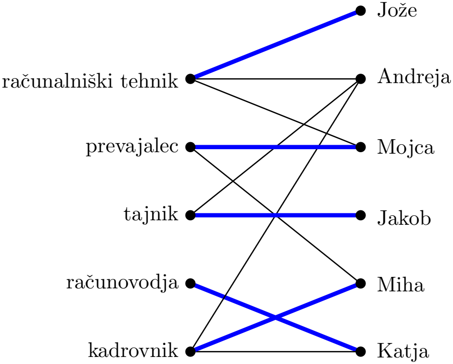
To je t.i. **problem prirejanja v dvodelnih grafih**.

Definicija

Graf G je **dvodelen**, *če je $V(G)$ unija dveh neodvisnih množic.*

Graf H iz zgornjega primera je dvodelen.

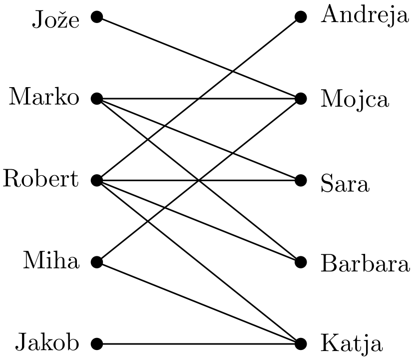
V konkretnem primeru rešitev obstaja (a ni enolična):



S podobnim pristopom lahko modeliramo tudi naslednji problem:

Danih je n deklet in n fantov in relacija kompatibilnosti med njimi. Ali jih je možno razdeliti v n kompatibilnih parov?

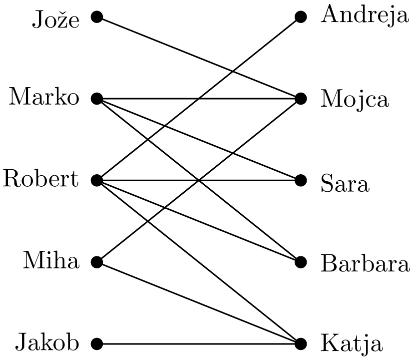
Zgled:



S podobnim pristopom lahko modeliramo tudi naslednji problem:

Danih je n deklet in n fantov in relacija kompatibilnosti med njimi. Ali jih je možno razdeliti v n kompatibilnih parov?

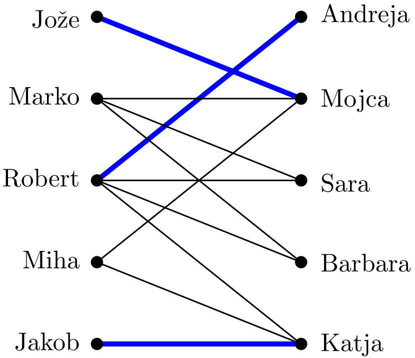
Zgled: V tem primeru rešitev ne obstaja!



S podobnim pristopom lahko modeliramo tudi naslednji problem:

Danih je n deklet in n fantov in relacija kompatibilnosti med njimi. Ali jih je možno razdeliti v n kompatibilnih parov?

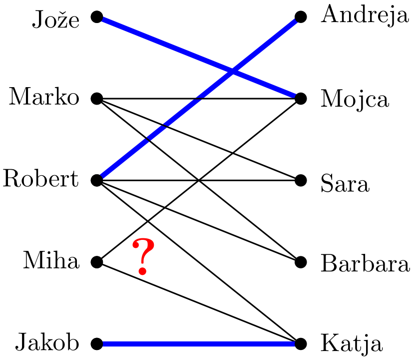
Zgled: V tem primeru rešitev ne obstaja!



S podobnim pristopom lahko modeliramo tudi naslednji problem:

Danih je n deklet in n fantov in relacija kompatibilnosti med njimi. Ali jih je možno razdeliti v n kompatibilnih parov?

Zgled: V tem primeru rešitev ne obstaja!



Zgled: *Razvrščanje poslov in barvanja grafov.*

Senat fakultete ima n komisij, ki se enkrat mesečno sestajajo na rednih sejah, v tednu pred sejo senata.

Določiti je potrebno termine sej komisij.

Na primer:

- *seja Komisije za študijske zadeve: ponedeljek ob 9:00*
- *seja Komisije za študentske zadeve: ponedeljek ob 11:00*
- *seja Komisije za znanstveno-raziskovalno delo: torek ob 9:00*
- *itd.*

Termina sej dveh komisij, ki imata vsaj enega skupnega člana, se ne smeta prekrivati.
Koliko različnih terminov potrebujemo?

Konstruiramo graf:

- Za vsako od komisij vpeljemo po eno točko.
- Dve točki povežemo s povezavo, če imata njuni komisiji skupnega člana.
- Točkam moramo prirediti take oznake (termine), da imata krajišči vsake povezave različni oznaki.

Zgled:

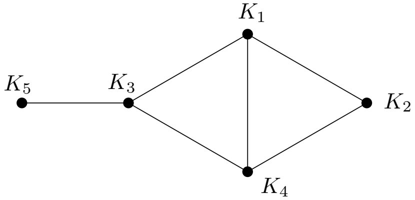
K_1: Arjana, Jakob, Katja, Miha

K_2: Barbara, Jakob, Vito

K_3: Aljaž, Boštjan, Katja, Rok

K_4: Arjana, Barbara, Rok

K_5: Boštjan, Marko, Petra



Definicija

Kromatično število *grafa* G*, označeno z* $\chi(G)$*, je najmanjše število barv, potrebnih za tako barvanje točk, da sta vsaki dve sosednji točki obravani različno.*

Graf je k*-***delen** *(ali:* k*-obarvljiv), če lahko njegovo množico točk zapišemo kot unijo* k *(morda praznih) neodvisnih množic.*

- 2-obarvljiv $\equiv$ dvodelen
- $\chi(G) =$ najmanjše število neodvisnih množic, potrebnih v particiji $V(G)$

Zgled:

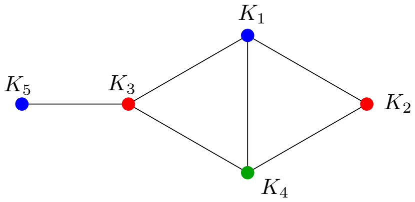
K_1: Arjana, Jakob, Katja, Miha

K_2: Barbara, Jakob, Vito

K_3: Aljaž, Boštjan, Katja, Rok

K_4: Arjana, Barbara, Rok

K_5: Boštjan, Marko, Petra



- ponedeljek ob 9:00
- ponedeljek ob 11:00
- torek ob 9:00

Zgled: *Zemljevidi in barvanja.*

Zemljevid je razdelitev ravnine na povezana območja.

Ali je možno območja vsakega zemljevida pobarvati z največ štirimi barvami, tako da imata vsaki dve sosednji območji različno barvo?

To je znameniti **problem štirih barv.**

Zgled:

Vir: https://www.mathsisfun.com/activity/coloring.html

Zgled:

Vir: https://www.mathsisfun.com/activity/coloring.html

Zgled:

Prirejeno po: https://www.mathsisfun.com/activity/coloring.html

Zgled:

Prirejeno po: https://www.mathsisfun.com/activity/coloring.html

Zgled: *Poti v cestnih omrežjih.*

Cestno omrežje lahko modeliramo z grafom.

Povezave grafa ustrezajo cestnim povezavam med križišči.

Vsaki od povezav priredimo utež glede na razdaljo ali čas potovanja.

Kako bi poiskali najkrajšo pot od točke x do točke y?

Če točke grafa predstavljajo naš dom in kraje, ki bi jih želeli obiskati, želimo najti krožno pot, ki bo obiskala vsako od točk natanko enkrat.

To je problem **hamiltonskega cikla**.

Če iščemo najkrajšo tako pot, dobimo problem **trgovskega potnika**.

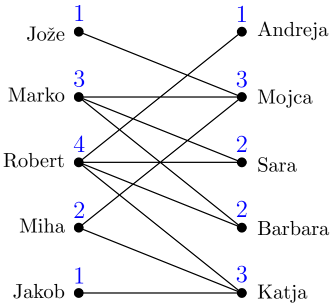
Stopnje točk in lema o rokovanju

Stopnje točk

Če je točka v krajišče povezave e, pravimo, da je povezava e **incidenčna** s točko v.

Stopnja točke v grafa $G = d_G(v)$ ali $d(v) =$ število povezav, incidenčnih z v

Zgled:
Pripišimo grafu iz prejšnjega zgleda stopnje točk:



Največjo stopnjo točke v grafu G označimo z $\Delta(G)$, najmanjšo pa z $\delta(G)$.

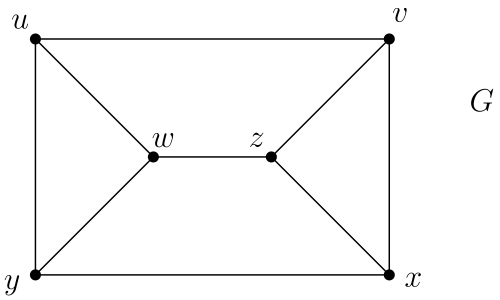
- V zgornjem primeru je $\delta(G) = 1$ in $\Delta(G) = 4$.

Graf G je **regularen**, če je $\Delta(G) = \delta(G)$.

Je k-**regularen**, če ima vsaka točka stopnjo k.

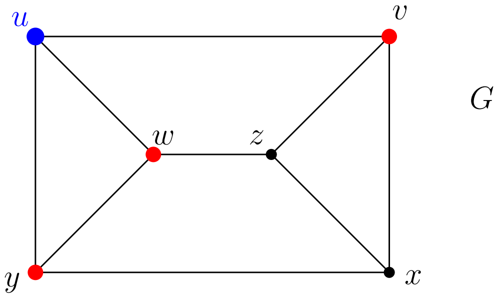
Soseščina točke $v = N_G(v)$ ali $N(v) =$ množica točk, sosednjih s točko v.

Zgled:
3-regularen graf:



Zgled:

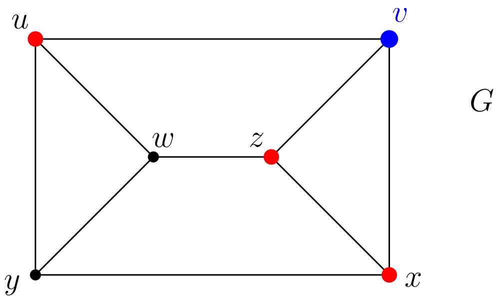
3-regularen graf:



$$N_G(u) = \{y, w, v\}$$

Zgled:

3-regularen graf:



$$N_G(v) = \{u, z, x\}$$

Lema o rokovanju

Red grafa $G = n(G) =$ število točk grafa G

Velikost grafa $G = e(G) =$ število povezav grafa G

Trditev (Formula o vsoti stopenj / "Lema o rokovanju")

Če je G graf, potem je

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e(G)\,.$$

Dokaz.

Vsaka od povezav grafa prispeva natanko dve enoti k vsoti vseh stopenj.

Vsaka od povezav ima namreč natanko dve krajišči in vsako od teh dveh krajišč prispeva (glede na to povezavo) natanko eno enoto k vsoti stopenj. $\square$

Oziroma matematično bolj formalno:

$$2e(G) = \sum_{e \in E(G)} 2 = \sum_{e \in E(G)} \sum_{v \in e} 1$$

$$= \sum_{v \in V(G)} \sum_{e \in E(G): v \in e} 1 = \sum_{v \in V(G)} d(v)\,.$$

Ta tehnika dokazovanja se imenuje "Preštevanje na dva načina".

Vsota vseh stopenj točk poljubnega grafa je torej vselej soda.

Posledica

Vsak graf ima sodo mnogo točk lihe stopnje.

Posledica

Ne obstaja graf lihega reda, ki bi bil k-regularen za liho število k.

Tri naloge:

1. Izračunaj število povezav k-regularnega grafa na n točkah.

2. Na zabavi se zbere trinajst ljudi. Vsak s seboj prinese tri darila, ki bi jih rad izmenjal s tremi drugimi udeleženci zabave. Ali jim to lahko uspe?

3. Dokaži, da v skupini dveh ali več ljudi lahko vedno najdemo dva, ki imata v tej skupini enako število prijateljev.

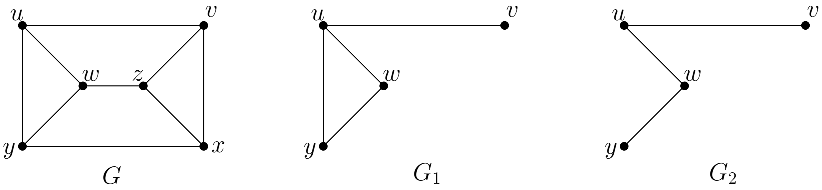
Konstrukcija regularnih grafov s poljubnimi induciranimi podgrafi

Definicija

Podgraf *grafa* G *je tak graf* H, *da je* $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, *prireditev krajišč povezavam grafa* H *pa je ista kot v* G.

Induciran podgraf *grafa* G *je podgraf grafa* G, *ki ga dobimo z brisanjem nekaj (nič ali več) točk (in z njimi incidenčnih povezav).*

Zgled:



- G_1 in G_2 sta podgrafa grafa G
- G_1 je induciran podgraf, G_2 pa ne

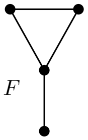
Dokazali bomo naslednji izrek in s tem konstruirali regularne grafe s poljubnimi induciranimi podgrafi.

Izrek

Za vsak graf F obstaja regularen graf G, ki vsebuje F kot inducirani podgraf.

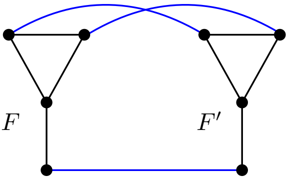
Ponazorimo **idejo dokaza** na konkretnem zgledu.

Dan je naslednji graf F:



Graf F ni regularen, saj je $\delta(F) = 1$ in $\Delta(F) = 3$.

Grafu F priredimo nov graf, G_1, tako da vzamemo dve kopiji grafa F, recimo jima F in F', in dodamo povezave med vsako točko v grafa F, ki ni stopnje $\Delta(F)$, in njeno kopijo v grafu F'.



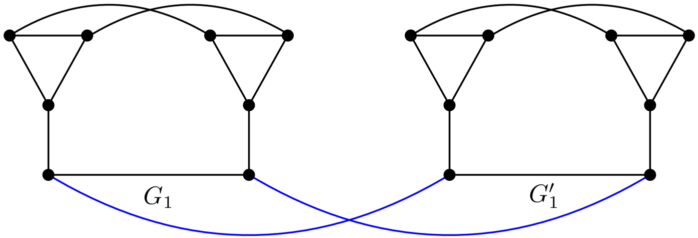
G_1

Točke stopnje 1 v grafu F postanejo v grafu G_1 stopnje 2.

Točke stopnje 2 v grafu F postanejo v grafu G_1 stopnje 3.

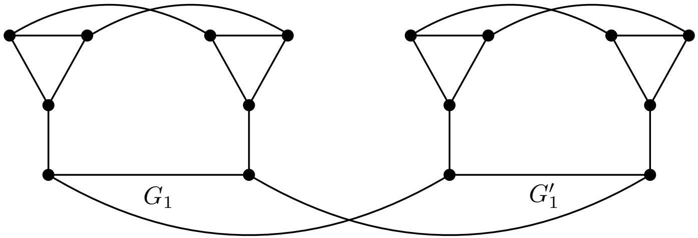
Točke stopnje 3 v grafu F ostanejo v grafu G_1 stopnje 3.

Postopek ponovimo na grafu G_1. Dobimo graf G_2.



G_2

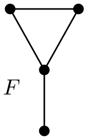
Postopek ponovimo na grafu G_1. Dobimo graf G_2.



G_2

Graf G_2 je regularen graf, ki vsebuje graf F kot induciran podgraf.

Dobljen graf ni nujno najmanjši s to lastnostjo.



Naloga:
Določi najmanjši red regularnega grafa, ki vsebuje graf F kot induciran podgraf.

Naloga:
Pot P_3 je graf z množico točk $\{a, b, c\}$ in množico povezav $\{ab, bc\}$. Kateri regularen graf, ki vsebuje P_3 kot induciran podgraf, dobimo z zgornjo konstrukcijo? Ali je to najmanjši regularen graf, ki vsebuje P_3 kot induciran podgraf?

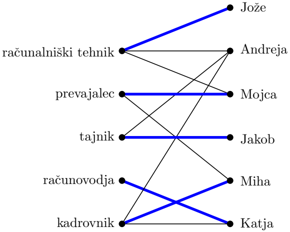
Prirejanja v dvodelnih grafih in Hallov izrek

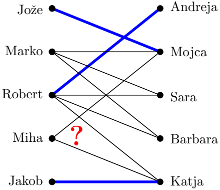
Spomnimo se: graf G je **dvodelen**, če je $V(G)$ unija dveh neodvisnih množic.

Prirejanje v grafu je množica povezav brez skupnih krajišč

Spoznali smo že dve uporabi prirejanj v dvodelnih grafih:

- razvrščanje kandidatov na delovna mesta
- (tradicionalen) **"problem porok":** razdelitev n deklet in n fantov v n kompatibilnih parov

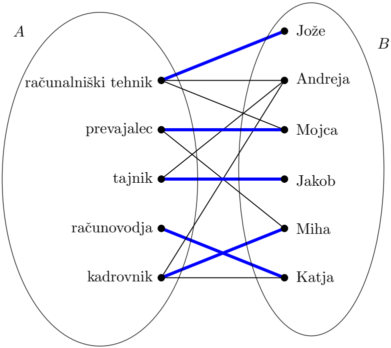


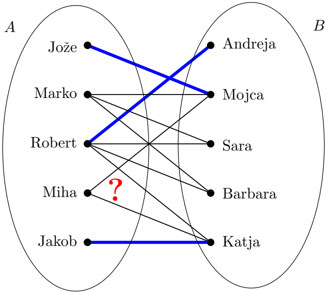


Zapišimo problem v jeziku teorije grafov.

Dan je dvodelen graf G. Pišemo lahko $V(G) = A \cup B$, kjer sta množici A in B neodvisni in velja $A \cap B = \emptyset$.

V tem primeru bomo tudi zapisali $G = (A, B; E)$.

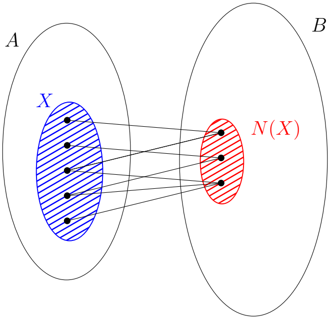




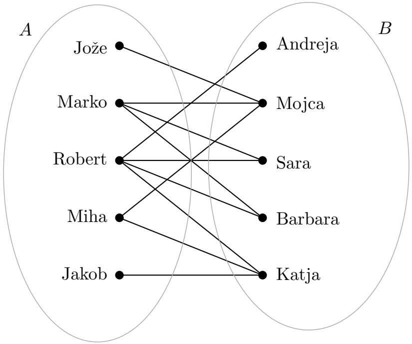
Kdaj v grafu G obstaja prirejanje, ki pokrije vse točke v množici A?

Za $X \subseteq A$ označimo z $N(X)$ množico vseh točk, ki imajo soseda v množici X.

Če obstaja taka podmnožica $X \subseteq A$, za katero velja, da je $|N(X)| < |X|$, potem iskano prirejanje gotovo ne obstaja!



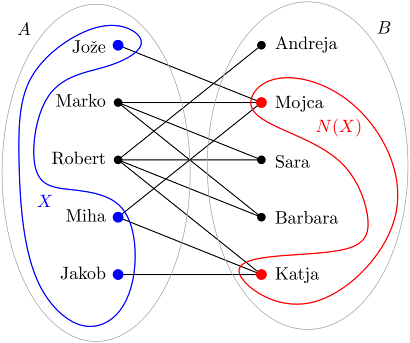
V zgledu s fanti in dekleti:



prirejanja ni bilo.

Razlog: obstaja množica $X \subseteq A$, za katero velja $|N(X)| < |X|$.

$X = \{$Jože, Miha, Jakob$\}$



$$|N(X)| = 2 < 3 = |X|$$

Recimo, da **za vse $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{A}$ velja $|\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X})| \geq |\boldsymbol{X}|$**.

Ali tedaj graf G nujno vsebuje prirejanje, ki v celoti pokrije množico A?

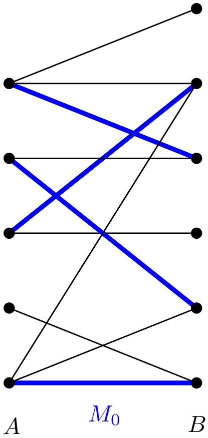
Hallov poročni izrek pravi, da je odgovor pritrdilen.

Izrek (Philip Hall, 1935)

V dvodelnem grafu $G = (A, B; E)$ obstaja prirejanje, ki pokrije vse točke v množici A, če in samo če je izpolnjen
Hallov pogoj: za vse $\boldsymbol{X} \subseteq \boldsymbol{A}$ velja $|\boldsymbol{N}(\boldsymbol{X})| \geq |\boldsymbol{X}|$.

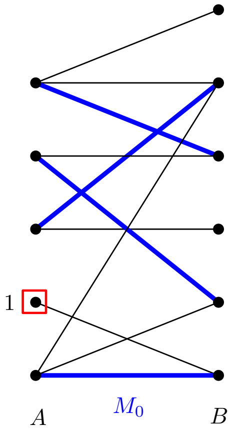
Ideja dokaza: prirejanje konstruiramo.

Začnemo s poljubnim prirejanjem M_0 (povezave prirejanja obarvamo modro).



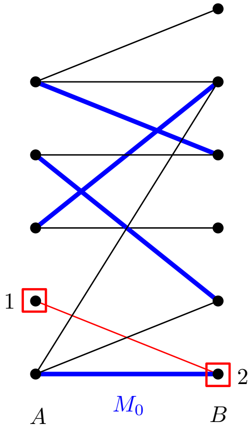
Nato pregledujemo točke grafa z naslednjim postopkom:

- Na začetku so dosežene vse točke v množici A, ki niso pokrite z M_0. (Če takih točk ni, je že M_0 iskano prirejanje.)



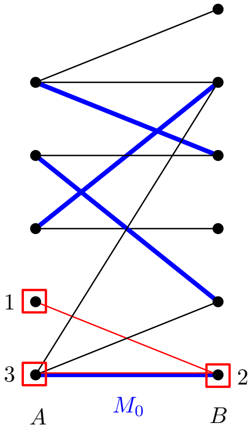
Pregled dosežene točke $a \in A$:

- označimo vse njene še nedosežene sosede



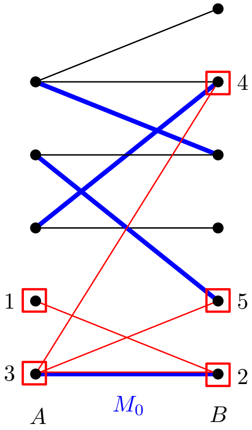
Pregled dosežene točke $b \in B$:

- če je pokrita z M_0, označimo drugo krajišče povezave prirejanja, ki jo vsebuje



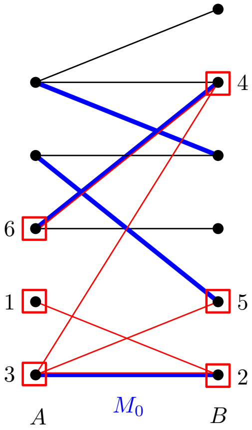
Pregled dosežene točke $a \in A$:

- označimo vse njene še nedosežene sosede



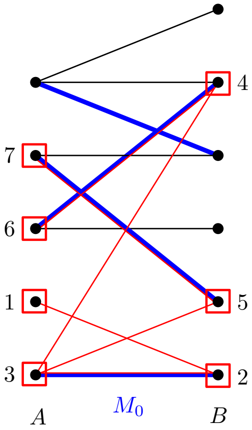
Pregled dosežene točke $b \in B$:

- če je pokrita z M_0, označimo drugo krajišče povezave prirejanja, ki jo vsebuje



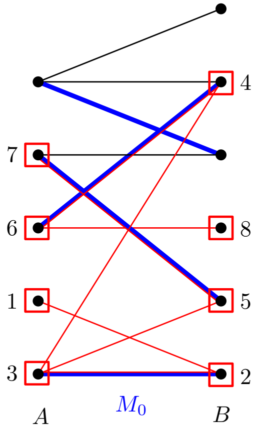
Pregled dosežene točke $b \in B$:

- če je pokrita z M_0, označimo drugo krajišče povezave prirejanja, ki jo vsebuje



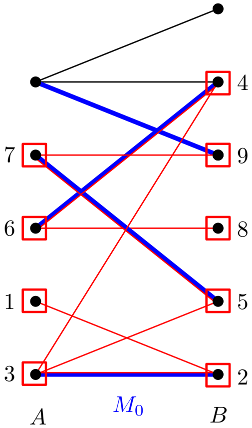
Pregled dosežene točke $a \in A$:

- označimo vse njene še nedosežene sosede



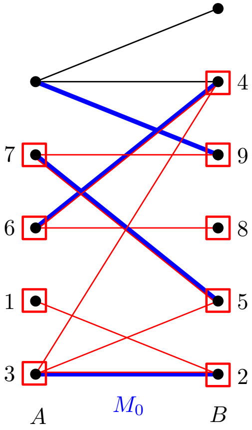
Pregled dosežene točke $a \in A$:

- označimo vse njene še nedosežene sosede



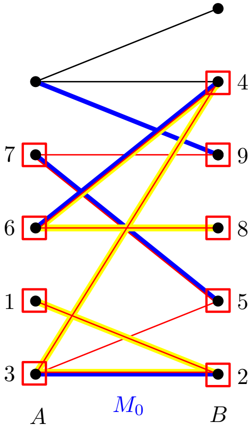
Pregled dosežene točke $b \in B$:

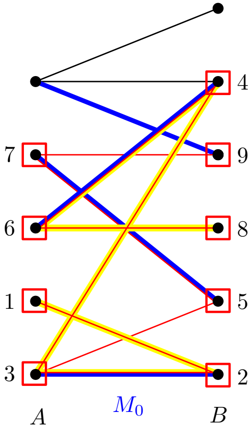
- če ni pokrita z M_0, se od točke b "sprehodimo" po označenih povezavah (levo vzdolž označene povezave, ki ni v prirejanju, desno vzdolž povezave prirejanja) in prirejanje M_0 **povečamo** z zamenjavo "prehodenih" povezav prirejanja s "prehodenimi" povezavami, ki niso v prirejanju.

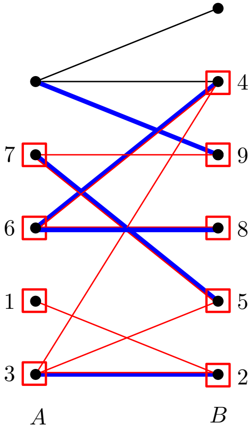


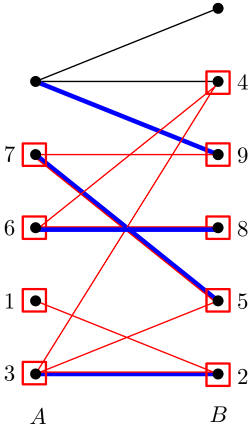
Pregled dosežene točke $b \in B$:

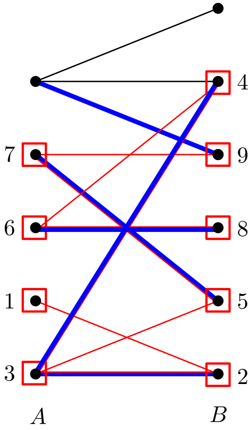
- če ni pokrita z M_0, se od točke b "sprehodimo" po označenih povezavah (levo vzdolž označene povezave, ki ni v prirejanju, desno vzdolž povezave prirejanja) in prirejanje M_0 **povečamo** z zamenjavo "prehodenih" povezav prirejanja s "prehodenimi" povezavami, ki niso v prirejanju.

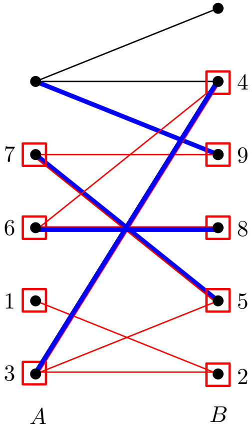


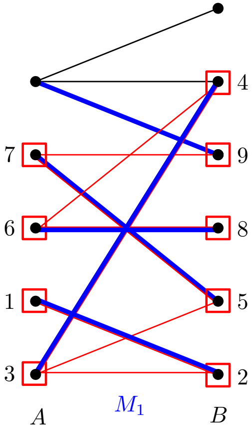

4
7
9
6
8
1
5
3
2
A
M_0
B


4
7
9
6
8
1
5
3
2
A
B


4
7
9
6
8
1
5
3
2
A
B


4
7
9
6
8
1
5
3
2
A
B


4
7
9
6
8
1
5
3
2
A
B



Dobimo prirejanje M_1.

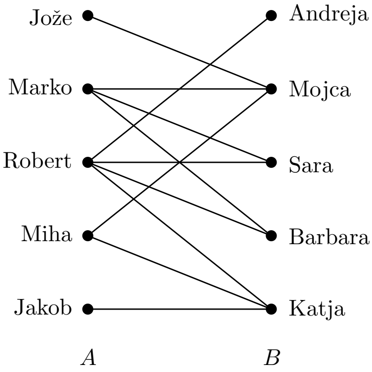
V zgornjem primeru je M_1 že iskano prirejanje (tako, ki pokrije množico A)!

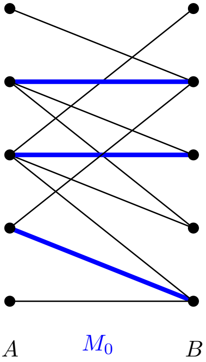
V nasprotnem primeru bi celoten postopek ponovili na M_1.

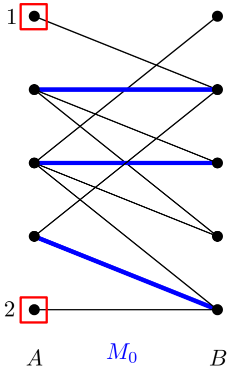
Trditev

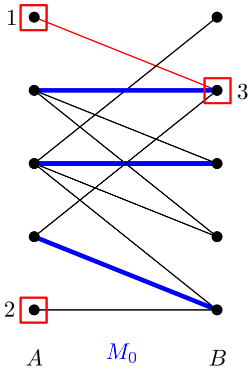
Če je Hallov pogoj izpolnjen, bo zgornji postopek našel prirejanje, ki v celoti pokrije množico A.

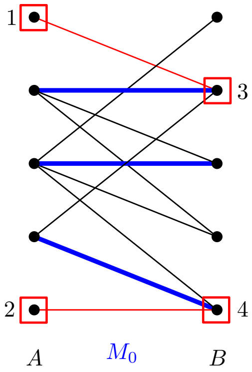
Da bi razumeli, zakaj je tako, si zgornji postopek oglejmo še na zgledu fantov in deklet.

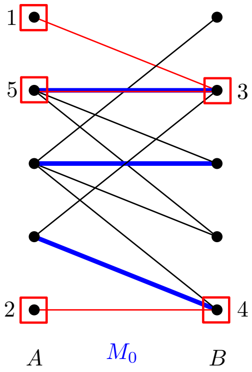

Jože
Marko
Robert
Miha
Jakob
Andreja
Mojca
Sara
Barbara
Katja
A
B

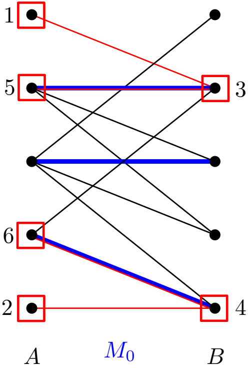

A
M_0
B

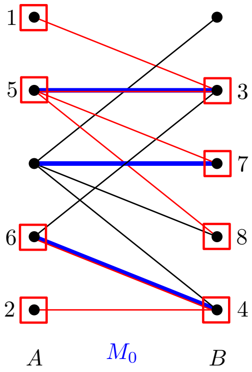

1
2
A
M_0
B

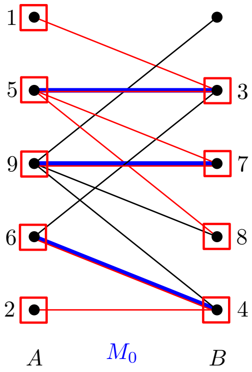

1
3
2
A
M_0
B

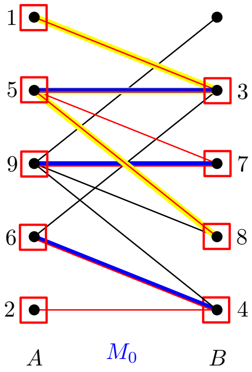

1
3
2
4
A
M_0
B

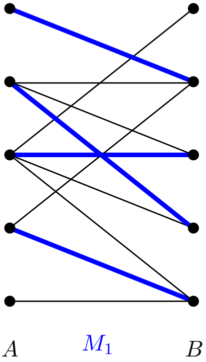

1
5
3
2
4
A
M_0
B


1
5
6
2
3
4
A
M_0
B

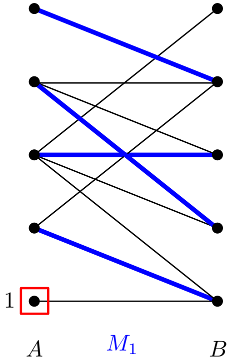

1
5
6
2
3
7
8
4
A
M_0
B

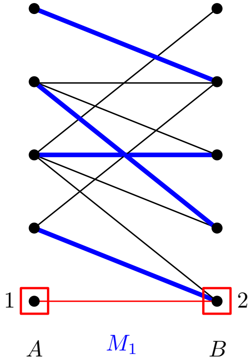

1
5
9
6
2
3
7
8
4
A
M_0
B

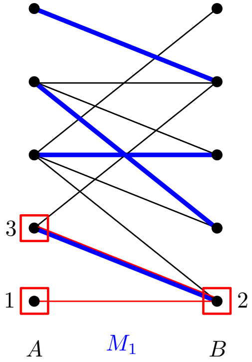

1
5
9
6
2
3
7
8
4
A
M_0
B

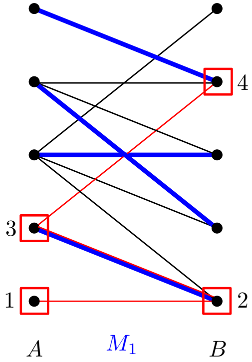

A
M_1
B

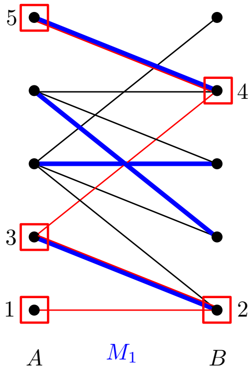
Postopek ponovimo na prirejanju M_1.



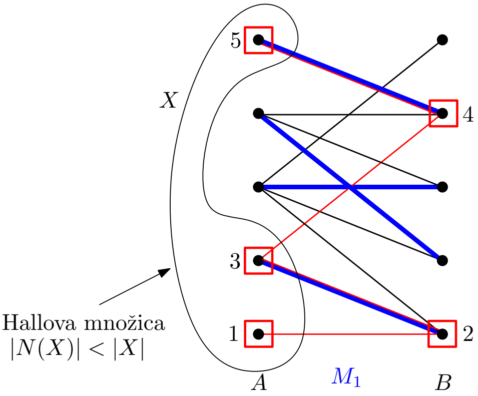

1
2
A
M1
B


3
1
2
A
M_1
B


4
3
1
2
A
M_1
B


5
4
3
1
2
A
M_1
B

Prirejanja M_1 ne moremo povečati.
Množica $X = \{a \in A : a \text{ je dosežena na koncu postopka}\}$ je t.i. **"Hallova množica"** (množica, za katero velja $|N(X)| < |X|$).



To velja tudi v splošnem:

Če zgornji postopek ne pridela prirejanja, ki bi množico A pokrilo v celoti, potem je množica
$X = \{a \in A : a \text{ je dosežena na koncu postopka}\}$ Hallova množica.

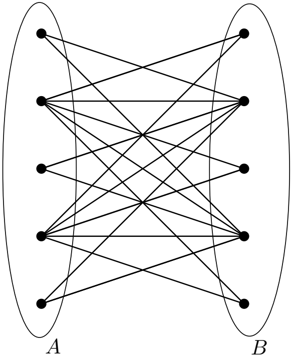
To pa pomeni, da Hallov pogoj ni izpolnjen.

Posledično:

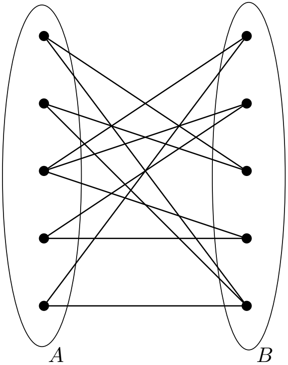
Trditev
Če je Hallov pogoj izpolnjen, bo zgornji postopek našel prirejanje, ki v celoti pokrije množico A.

Naloga:

Za vsakega od naslednjih dveh dvodelnih grafov določi, ali vsebuje kakšno prirejanje, ki v celoti pokrije množico A.
Če tako prirejanje obstaja, ga poišči. Če ne obstaja, poišči vsaj eno Hallovo množico.



G_1



G_2

Problem stikal in luči, liha dominacija v grafih

Motivacija:

Imamo $n \times n$ šahovnico, kjer ima vsak kvadrat stikalo in luč.

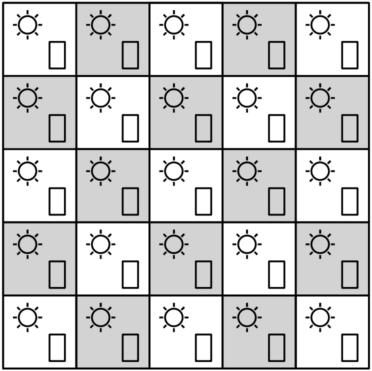
Če pritisnemo na stikalo kvadrata, se spremeni stanje luči (ugasnjeno–prižgano) **v tem kvadratu in v vseh sosednjih**.

Na začetku so vse luči ugasnjene.

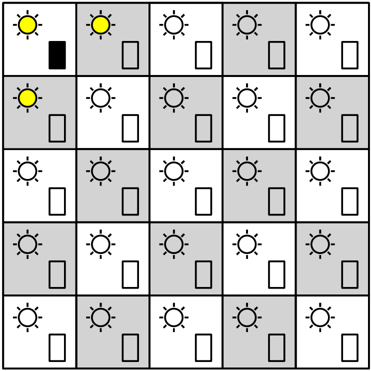
Ali je možno pritisniti na stikala kvadratov v takem zaporedju, da bodo na koncu vse luči prižgane?

Opomba: Včasih se problem formulira ravno obratno – iz dane konfiguracije prižganih luči bi radi ugotovili, kako jih ugasniti (angl. **"Lights Out Puzzle"**).

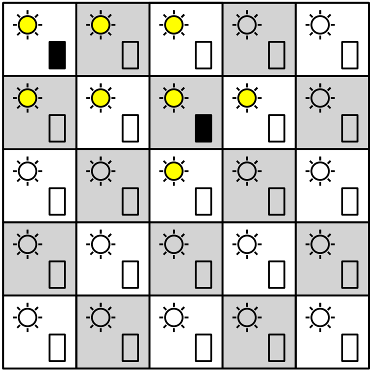
Zgled:



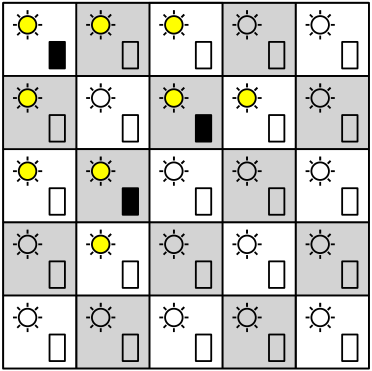
Zgled:



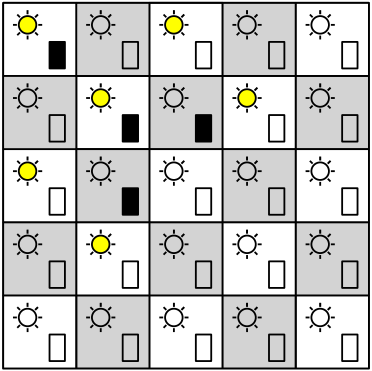
Zgled:



Zgled:



Zgled:



Vprašanje:
Recimo, da smo se odločili, katera stikala bomo prižali.

Kako bi za neko luč ugotovili, ali bo prižgana ali ne?

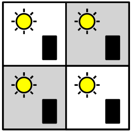
Razmislimo:

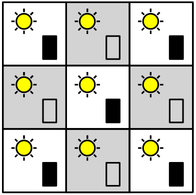
- Prvi pritisk poljubnega stikala na kvadratu, kjer je luč, in na enem od sosednjih kvadratov, luč prižge.
- Ponoven pritisk poljubnega takega stikala luč ugasne.

Sklepamo:
Luč bo prižgana če in samo če je skupno število pritisnjenih stikal na kvadratu, kjer je luč, in na sosednjih kvadratih, **liho**.

Zgled:

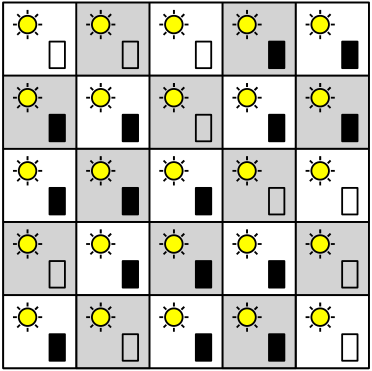
Rešitvi za šahovnici velikosti 2×2 in 3×3:





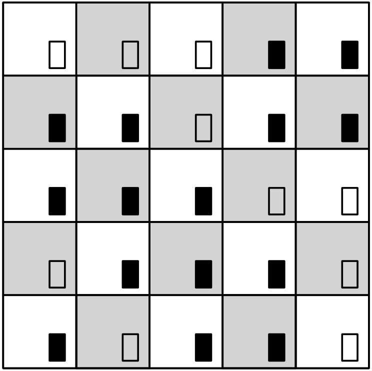
Zgled:

Rešitev naloge za šahovnico velikosti 5×5:



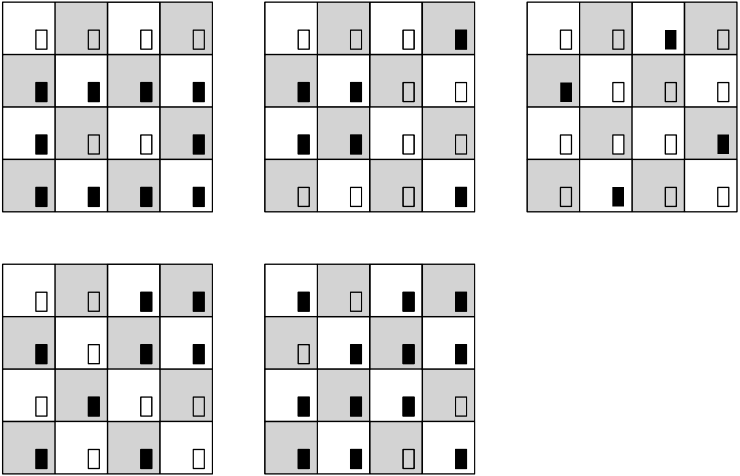
Zgled:

Rešitev naloge za šahovnico velikosti 5×5:



Naloga:
Rešite nalogo za šahovnico velikosti 4×4.

Možnih rešitev je več:

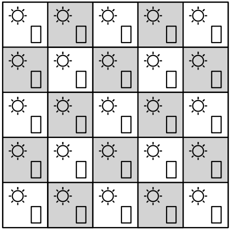


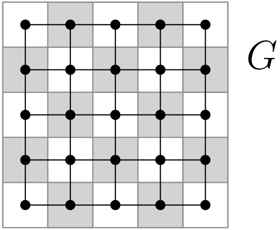
Problem modeliramo z grafi.

Točke grafa = kvadrati šahovnice

Dva kvadratka sta povezana, če sta sosednja.

Zgled:





Za točko $v \in V(G)$ označimo z $N[v]$ njeno **zaprto soseščino** v grafu:

$$N[v] = \{u \in V(G) : u = v \text{ ali } uv \in E\}\,.$$

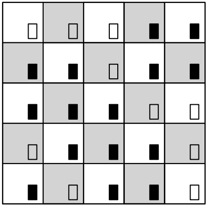
Problem stikal in luči postane naslednji:

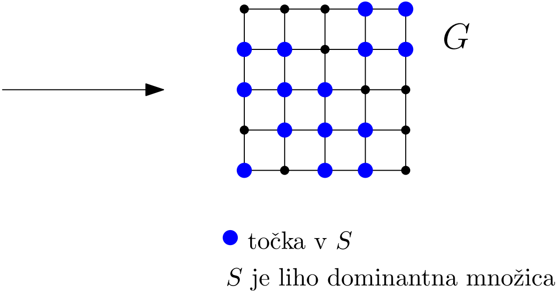
Iščemo tako množico S točk, da bo za vsako točko $v \in V(G)$ veljalo: $\lvert S \cap N[v] \rvert$ je liho število.

Taki množici točk pravimo **liho dominantna množica**.

Liha dominacija je eden od številnih konceptov dominacije v grafih.

Zgled:





V zaprti soseščini vsake točke je liho mnogo modrih točk.

Ekvivalentno:

- Točke v S imajo sodo mnogo sosedov v S.
- Točke, ki niso v S, imajo liho mnogo sosedov v S.

Ali je problem vedno rešljiv?

Izrek (Sutner, 1989)

Vsak graf ima liho dominantno množico.

V literaturi je na voljo več različnih dokazov tega izreka:

- linearno-algebraičen dokaz (z matrikami)
- kombinatorični dokazi (z digrafi / direktno z grafi)

V slovenščini je nekaj dokazov opisanih v:

- Maja Frangež, Liho dominantne množice v grafih, Zaključna projektna naloga, Univerza na Primorskem, Fakulteta za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije, 2013. `http://www.famnit.upr.si/files/zakljucna_dela_repo/127`

Izomorfizmi, razcepi grafov in drevesa

Spomnimo se:

Zanka v grafu je povezava, ki ima enaki krajišči.

Dve povezavi sta **vzporedni**, če imata isti par krajišč.

Graf je **enostaven**, če nima zank in vzporednih povezav.

Enostaven graf je enolično določen z urejenim parom (V, E), *kjer je* V *množica točk in* $E \subseteq \binom{V}{2}$ *je množica povezav.*

$e = \{u, v\} \in E$: pišemo $e = uv$ $(= vu)$

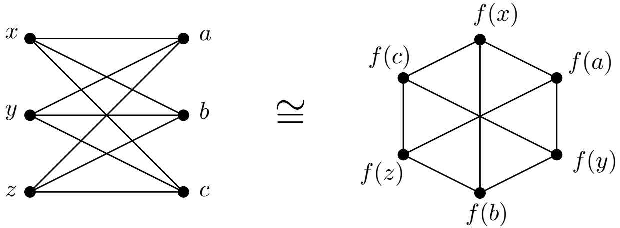
Definicija

Izomorfizem *enostavnih grafov G in H je bijektivna preslikava $f : V(G) \to V(H)$, ki ohranja sosednost:*

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow f(u)f(v) \in E(H) \,.$$

Če obstaja izomorfizem grafov G in H, pravimo, da sta grafa **izomorfna** *(***drug drugemu***). Pišemo $G \cong H$.*

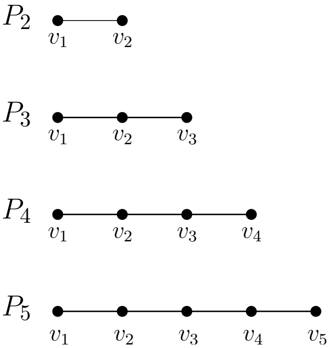
Zgled:



Par izomorfnih grafov pogosto smatramo za identična.

Vse paroma izomorfne grafe združimo v t.i. **razred izomorfnosti**.

Za naravno število n je **pot** P_n enostaven graf z množico točk $\{v_1, \ldots, v_n\}$ in množico povezav $\{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n\}$.



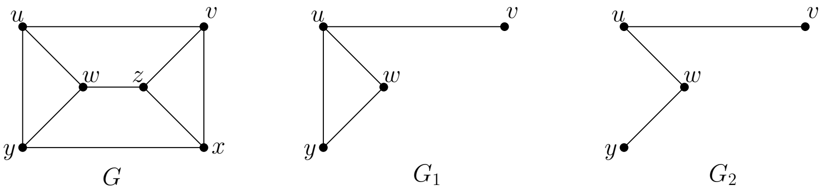
Spomnimo se:

Definicija

Podgraf *grafa* G *je tak graf* H, *da je* $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, *prireditev krajišč povezavam grafa* H *pa je ista kot v* G.

Induciran podgraf *grafa* G *je podgraf grafa* G, *ki ga dobimo z brisanjem nekaj (nič ali več) točk (in z njimi incidenčnih povezav).*

Zgled:



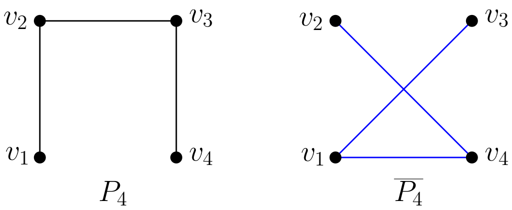
- G_1 in G_2 sta podgrafa grafa G
- G_1 je induciran podgraf, G_2 pa ne

Spomnimo se:

Definicija

Komplement $\overline{G}$ *enostavnega grafa* G *je tak enostaven graf z množico točk* $V(G)$*, da velja* $uv \in E(\overline{G})$ *če in samo če* $uv \notin E(G)$.

Kaj je komplement poti P_4?



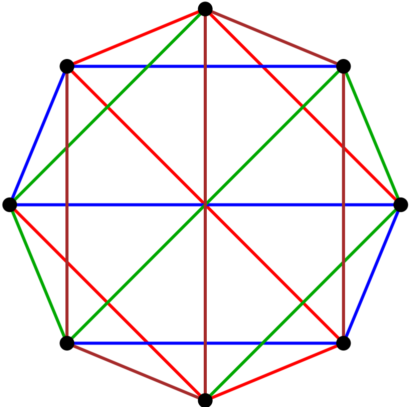
Opazimo: $P_4 \cong \overline{P_4}$.

Definicija

Graf je **sebi-komplementaren**, *če je izomorfen svojemu komplementu.*
Razcep *grafa je tak seznam njegovih podgrafov, da se vsaka povezava grafa pojavi v natanko enem od podgrafov na seznamu.*

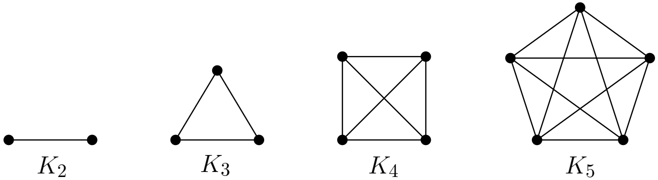
Zgled:

Razcep 5-regularnega grafa na 8 točkah na 4 kopije poti P_6:



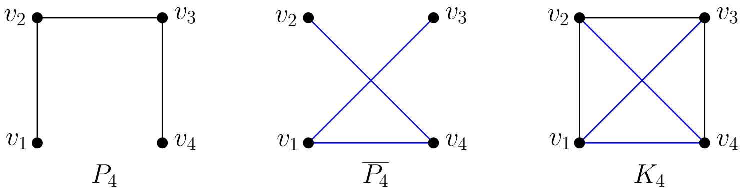
Lastnost sebi-komplementarnosti je moč opisati s pomočjo razcepov.

Za naravno število n je **poln graf** K_n enostaven graf reda n s paroma povezanimi točkami.

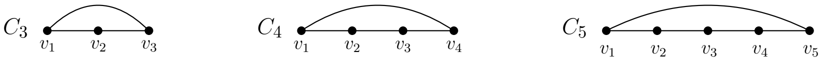


Velja:
Graf H reda n je sebi-komplementaren če in samo če ima poln graf K_n razcep iz dveh kopij grafa H.

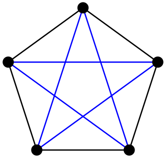
Zgled: Graf P_4 je sebi-komplementaren.
K_4 ima razcep na dve kopiji grafa P_4:



Za naravno število $n \geq 3$ je **cikel** C_n enostaven graf z množico točk $\{v_1, \ldots, v_n\}$ in množico povezav $\{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$.



Zgled: K_5 ima razcep na dve kopiji grafa C_5, tj., 5-cikel je sebi-komplementaren:



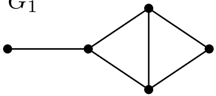
Definicija

Graf je:

- **povezan**, *če sta vsaki dve točki u, v vsebovani v podgrafu, izomorfnemu kakšni poti,*
- **acikličen**, *če noben njegov podgraf ni izomorfen kakšnemu ciklu,*
- **drevo**, *če je povezan in acikličen.*

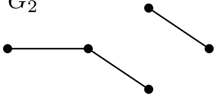
Zgled:

G_1



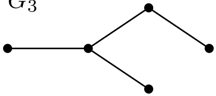
povezan graf, ki ni acikličen

G_2



acikličen graf, ki ni povezan

G_3



povezan acikličen graf = drevo

Drevesa imajo veliko različnih karakterizacij in lepih lastnosti.

Za nas bo pomembno le naslednje dejstvo:

Za vsako drevo T velja $e(T) = n(T) - 1$.

Z drugimi besedami:

- Drevo z n točkami ima natanko $n - 1$ povezav.

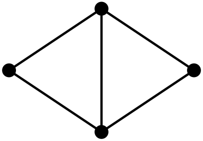
Domneva Ringela in Kotziga o ljubkih označitvah dreves

Če ima graf G razcep na kopije grafa H, potem mora veljati:

- **število povezav grafa** H **deli število povezav grafa** G in
- $\Delta(H) \leq \Delta(G)$.

Ta dva pogoja pa nista zadostna.

Zgled: K_5 nima razcepa na dve kopiji naslednjega grafa:



Häggkvist je leta 1989 postavil naslednjo domnevo:

Če je G $2m$-regularen graf in je T drevo z m povezavami, potem ima G razcep na $n(G)$ kopij drevesa T.

(Opomba: m namesto $2m$ ni dovolj: K_4 nima razcepa na kopije drevesa s 4 točkami in s točko stopnje 3.)

Domneva je še odprta.
Že več kot 50 let pa je nerešen tudi naslednji **poseben primer:**

Domneva (Ringel, 1964)

Če je T poljubno drevo z m povezavami, potem ima K_{2m+1} razcep na $2m+1$ kopij drevesa T.

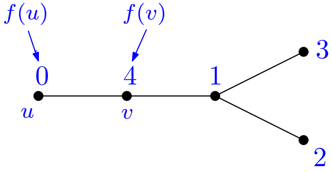
Poskusi dokazati Ringelovo domnevo so se večinoma osredotočili na naslednjo domnevo o drevesih.

Definicija

Ljubka označitev *drevesa T z m povezavami je taka bijektivna funkcija $f : V(T) \to \{0, \ldots, m\}$, da velja*

$$\{|f(u) - f(v)| \, : \, uv \in E(T)\} = \{1, \ldots, m\}.$$

Zgled: $m = 4$



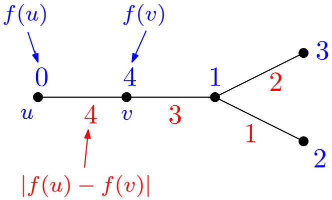
Poskusi dokazati Ringelovo domnevo so se večinoma osredotočili na naslednjo domnevo o drevesih.

Definicija

Ljubka označitev *drevesa T z m povezavami je taka bijektivna funkcija $f : V(T) \to \{0, \dots, m\}$, da velja*

$$\{|f(u) - f(v)| \; : \; uv \in E(T)\} = \{1, \dots, m\} \, .$$

Zgled: $m = 4$



Domneva (Kotzig, Ringel, 1964)

Vsako drevo ima ljubko označitev.

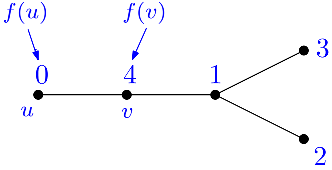
Pomembnost zgornje domneve je razvidna iz naslednjega izreka:

Izrek (Rosa, 1967)

Če ima drevo T z m povezavami ljubko označitev, potem ima K_{2m+1} razcep na $2m+1$ kopij drevesa T.

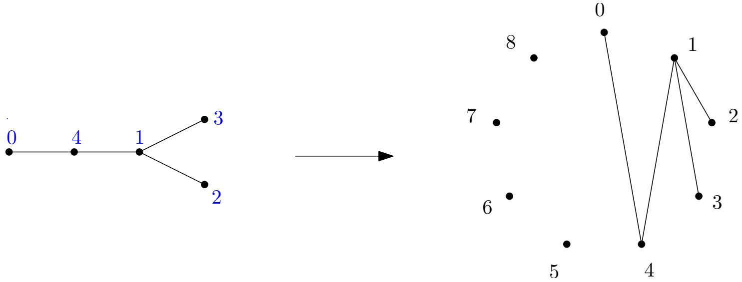
Zgled:

$m = 4$

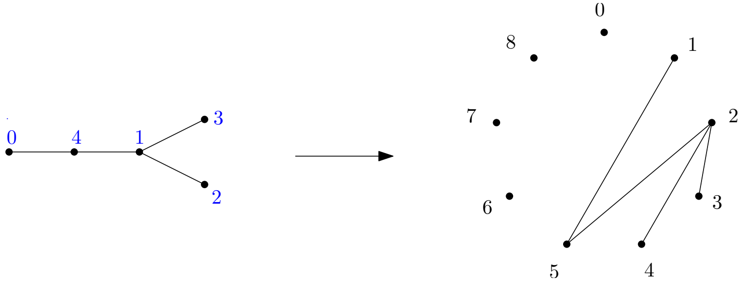


Kako bi razcepili K_9 na 9 kopij zgornjega drevesa?

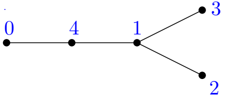
Zgled:

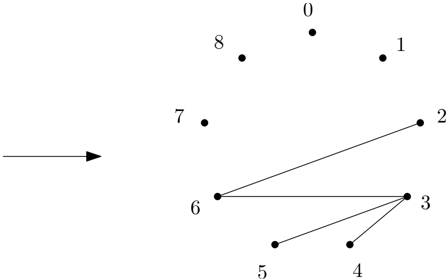


Zgled:

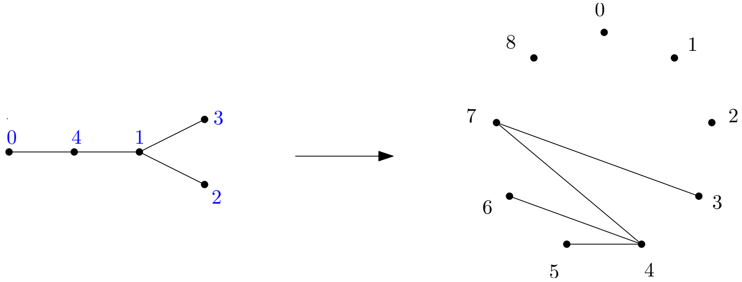


Zgled:

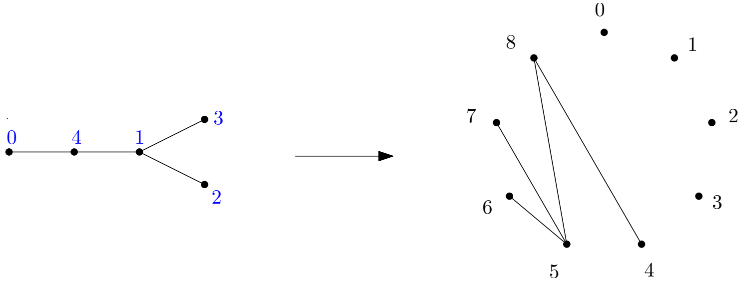




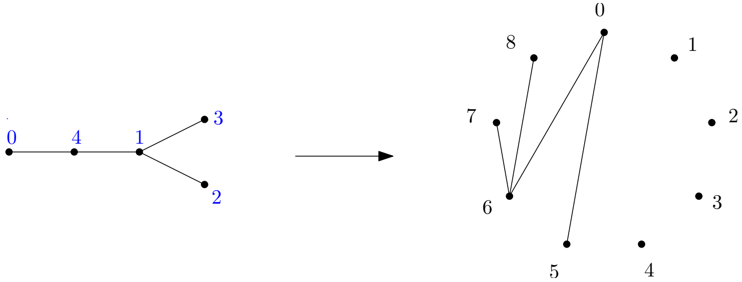
Zgled:



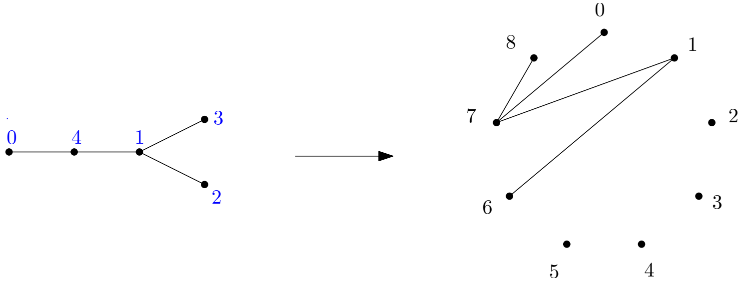
Zgled:



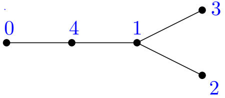
Zgled:

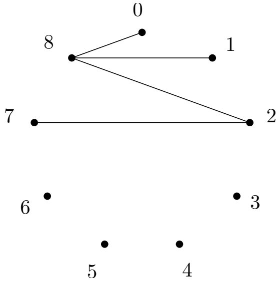


Zgled:

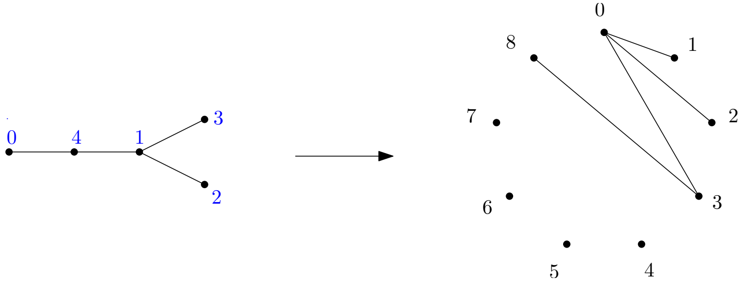


Zgled:

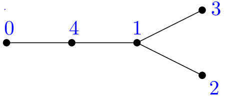


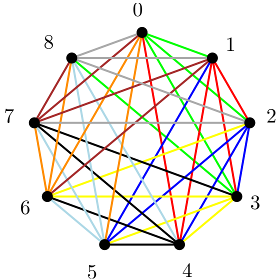


Zgled:



Zgled:



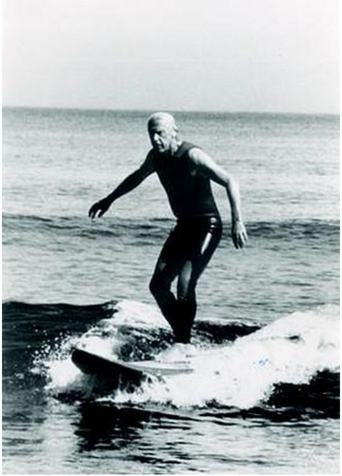


Avtorja domneve:

Anton Kotzig (1919–1991)

Vir: http://america.pink/anton-kotzig_427035.html

Gerhard Ringel (1919–2008)



Vir: https://en.wikipedia.org/wiki/Gerhard_Ringel

Domneva je bila objavljena leta 1967 v članku Alexandra Rose:

ON CERTAIN VALUATIONS OF THE VERTICES OF A GRAPH

A. ROSA *

RÉSUMÉ.

Sur certaines valuations des sommets d'un graphe.

On considère seulement des graphes non orientés finis, sans boucles et sans arêtes multiples. Par valuation d'un graphe nous entendons une application injective de l'ensemble des sommets du graphe dans l'ensemble de tous les entiers non négatifs. On définit des valuations particulières du graphe G ($\alpha, \beta, \sigma, \rho$ de plus en plus générales) et on étudie les conditions d'existence de telles valuations pour des classes données de graphes. On montre la relation entre ces valuations et le problème de l'existence de « décompositions cycliques » d'un graphe complet à m sommets (dont la réalisation plane est un polygône régulier de m sommets avec toutes ses diagonales) en sous-graphes partiels isomorphes.

On obtient (par exemple) le résultat suivant :

Théorème. *Il existe une décomposition cyclique d'un graphe complet de $2n + 1$ sommets en sous-graphes isomorphes à un graphe donné G comportant n arêtes, si et seulement si il existe une ρ-valuation du graphe G.*

On donne des classes particulières de graphes telles que pour tout graphe G d'une telle classe il existe une décomposition cyclique du graphe complet (ayant le nombre correspondant de sommets) en sous-graphes partiels isomorphes à G.

(Nous entendons par décomposition cyclique d'un graphe complet une décomposition R sans arête commune telle que si $G \in R$, alors $G' \in R$ aussi, où G' est obtenu par une rotation de G.)

Kljub več kot 200 objavljenih člankov na to temo je domneva še vedno odprta.
Zelo "svež" članek:

ALMOST ALL TREES ARE ALMOST GRACEFUL

ANNA ADAMASZEK, PETER ALLEN, CODRUŢ GROSU, AND JAN HLADKÝ

Abstract. The Graceful Tree Conjecture of Rosa from 1967 asserts that the vertices of each tree T of order n can be injectively labelled by using the numbers $\{1, 2, \dots, n\}$ in such a way that the absolute differences induced on the edges are pairwise distinct.

We prove the following relaxation of the conjecture for each $\gamma > 0$ and for all $n > n_0(\gamma)$. Suppose that *(i)* the maximum degree of T is bounded by $O_\gamma(n/\log n)$, and *(ii)* the vertex labels are chosen from the set $\{1, 2, \dots, \lceil(1+\gamma)n\rceil\}$. Then there is an injective labelling of $V(T)$ such that the absolute differences on the edges are pairwise distinct. In particular, asymptotically almost all trees on n vertices admit such a labelling.

As a consequence, for any such tree T we can pack $\lceil(2+2\gamma)n\rceil - 1$ copies of T into $K_{\lceil(2+2\gamma)n\rceil-1}$ cyclically. This proves an approximate version of the Ringel–Kotzig conjecture (which asserts the existence of a cyclic packing of $2n-1$ copies of any T into K_{2n-1}) for these trees.

The proof proceeds by showing that a certain very natural randomized algorithm produces a desired labelling with high probability.

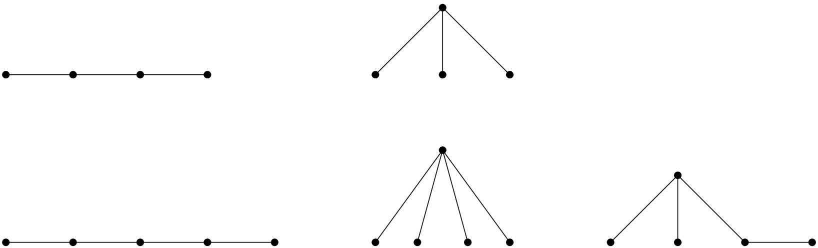
1. Introduction

1.1. **Graceful labelling.** Let G be a graph with n vertices and q edges. A *vertex labelling* of G is an assignment of natural numbers to the vertices of G, subject to certain conditions. A vertex labelling f is called *graceful* if f is an injection from $V(G)$ to the set $\{1, \dots, q+1\}$ such that, if each edge $xy \in E(G)$ is assigned the *induced* label $|f(x) - f(y)|$, then the resulting edge labels are distinct. G is called *graceful* if it admits a graceful labelling.

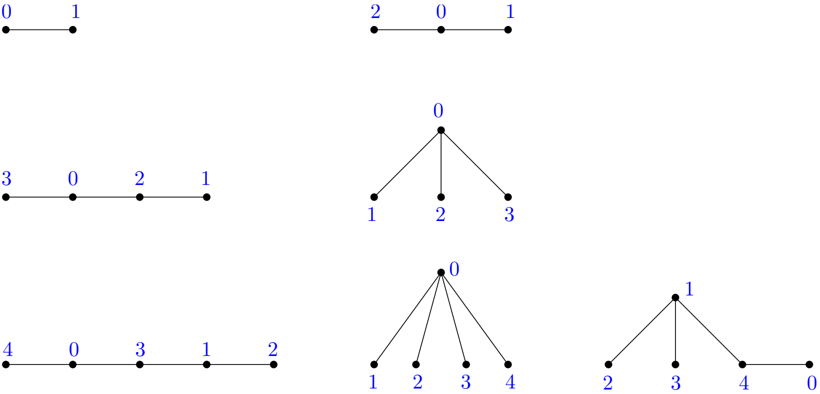
Graceful labellings were first introduced by Rosa [18] under the name of β-*valuations*. It was Golomb [9] who used the term *graceful* for the first time.

A natural problem associated with graceful labellings is to determine which graphs are

Naloga: Za vsakega od naslednjih dreves poišči vsaj eno ljubko označitev.



Rešitev:



Digrafi

Definicija

Usmerjen graf *ali* **digraf** G *je trojica, ki sestoji iz* **množice točk** $V(G)$, **množice povezav** $E(G)$ *in funkcije, ki vsaki povezavi priredi* **urejen par** *točk.*

Prvi točki v paru rečemo **rep**, *drugi točki pa* **glava**; *rep in glava sta* **krajišči** *povezave. Pravimo, da gre povezava* **od** *repa* **do** *glave.*

Zanka *je povezava, katere krajišči sta enaki.*
Dve povezavi sta **vzporedni**, *če imata isti urejen par krajišč.*

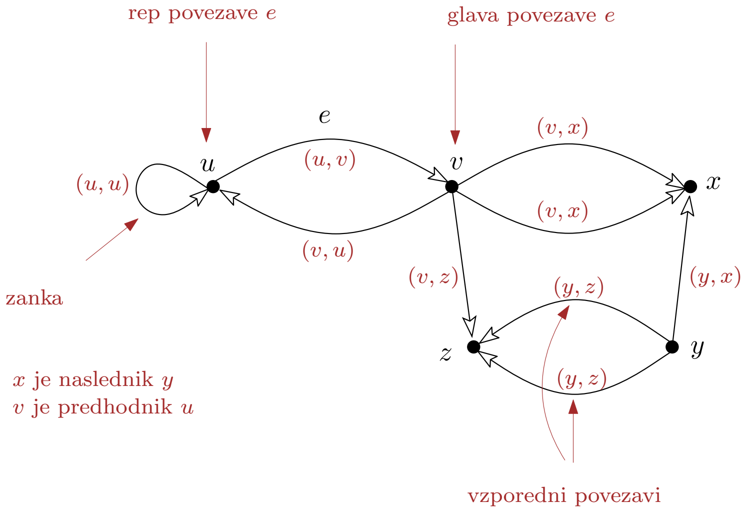
Digraf je **enostaven**, *če je vsak urejen par rep in glava kvečjemu ene povezave; ena zanka je lahko prisotna v vsaki točki.*

- *V enostavnem digrafu pišemo* uv *za povezavo z repom* u *in glavo* v.

Če obstaja povezava od u *do* v, *pišemo* $u \to v$ *in rečemo, da je točka* v **naslednik** *točke* u, *točka* u *pa* **predhodnik** *točke* v.

Zgled:

$V(G) = \{u, v, x, y, z\}$



Ali je ta digraf enostaven?

Digrafi so posplošitev grafov.

Uporabni so na različnih področjih, na primer:

- za modeliranje končnih avtomatov / diskretnih dinamičnih sistemov,
- za modeliranje markovskih verig,
- v bioinformatiki (za probleme rekonstrukcije zaporedja DNA v genomu),
- v teoriji iger.

Igre kot digrafi

Množica točk je množica možnih stanj igre.

Povezava od stanja x do stanja y pomeni, da obstaja poteza v igri, ki vodi od x do y.

Zgled: Šah:

- točke digrafa = vse možne legalne postavitve (konfiguracije) šahovskih figur na šahovnici
- $x \to y$, če v konfiguraciji x obstaja poteza enega od igralcev, ki vodi v konfiguracijo y

Število točk tega digrafa ni znano; ocenjuje se, da je med 10^{40}–10^{50}.

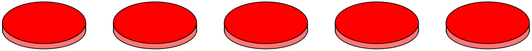
Igra Nim

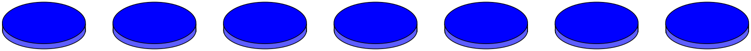
Oglejmo si naslednjo preprostejšo igro, **Nim:**

Igra je določena z dvema naravnima številoma r in s, $r \leq s$.
Imamo dva kupčka z žetoni, enega z r žetoni in enega s s žetoni.
Igro igrata dva igralca, ki izmenično jemljeta z enega od kupčkov enega ali več žetonov.
Zmaga igralec, ki vzame zadnji žeton.

Kako poiskati zmagovalno strategijo?

Zgled:

$r = 5$ 

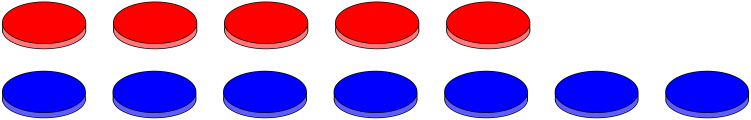
$s = 7$ 

Zgled:

prvi igralec vzame tri modre žetone

$r = 5$

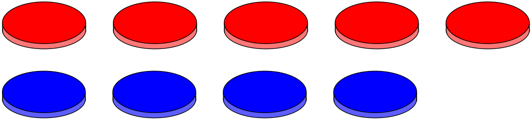
$s = 7$



Zgled:

$r = 5$

$s = 7$

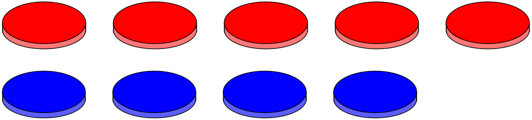


Zgled:

drugi igralec vzame en moder žeton

$r = 5$

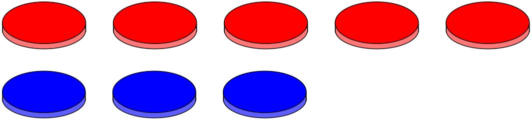
$s = 7$



Zgled:

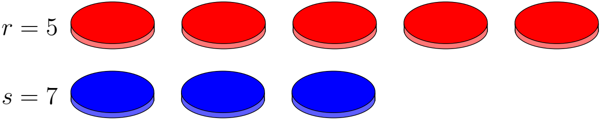
$r = 5$

$s = 7$

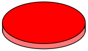


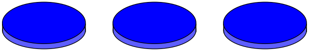
Zgled:

prvi igralec vzame štiri rdeče žetone



Zgled:

$r = 5$ 

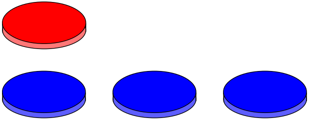
$s = 7$ 

Zgled:

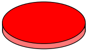
drugi igralec vzame dva modra žetona

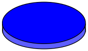
$r = 5$

$s = 7$



Zgled:

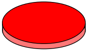
$r = 5$ 

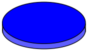
$s = 7$ 

Zgled:

ne glede na to, kateri žeton vzame prvi igralec,

bo zmagal drugi igralec (saj bo vzel zadnji žeton)

$r = 5$ 

$s = 7$ 

Možna stanja igre so natanko določena s številom žetonov na vsakem od kupčkov.

Igro lahko torej modeliramo z digrafom D z množico točk

$$\{(i,j) \mid 0 \le i \le r, \quad 0 \le j \le s\}$$

in s povezavami
$(i,j) \to (k,\ell)$, če in samo če
$(i = k \text{ in } j > \ell)$ ali $(j = \ell \text{ in } i > k)$.

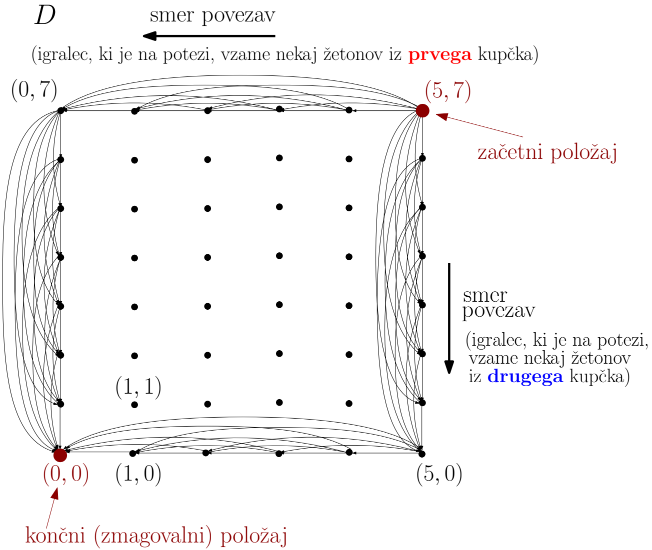
Začetni položaj je točka (r,s).

Povezava v grafu ustreza potezi igre, ki trenutno stanje privede v enega od njegovih naslednikov.

Obstaja samo en **zmagovalni položaj**, namreč točka $(0,0)$.

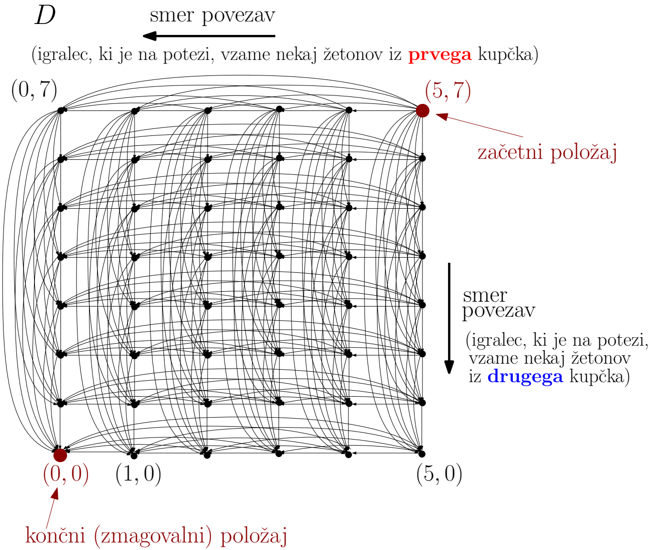
Potek igre si torej lahko predstavljamo kot usmerjeno pot v digrafu D od začetnega do končnega (zmagovalnega) položaja.

Zgled:



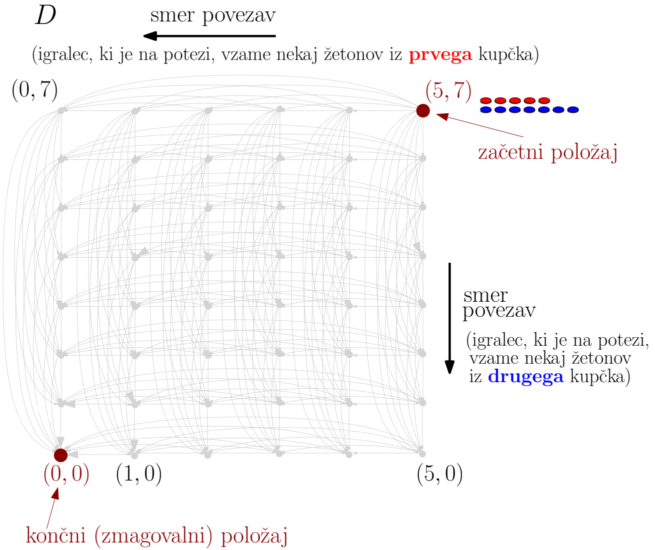
D
smer povezav
(igralec, ki je na potezi, vzame nekaj žetonov iz **prvega** kupčka)
$(0,7)$
$(5,7)$
začetni položaj
smer povezav
(igralec, ki je na potezi, vzame nekaj žetonov iz **drugega** kupčka)
$(1,1)$
$(0,0)$
$(1,0)$
$(5,0)$
končni (zmagovalni) položaj

Zgled:

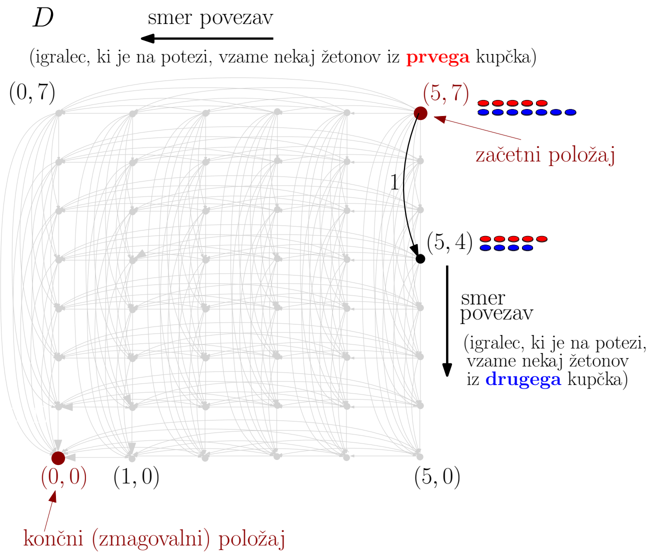


D
smer povezav
(igralec, ki je na potezi, vzame nekaj žetonov iz **prvega** kupčka)
$(0,7)$
$(5,7)$
začetni položaj
smer povezav
(igralec, ki je na potezi, vzame nekaj žetonov iz **drugega** kupčka)
$(0,0)$
$(1,0)$
$(5,0)$
končni (zmagovalni) položaj

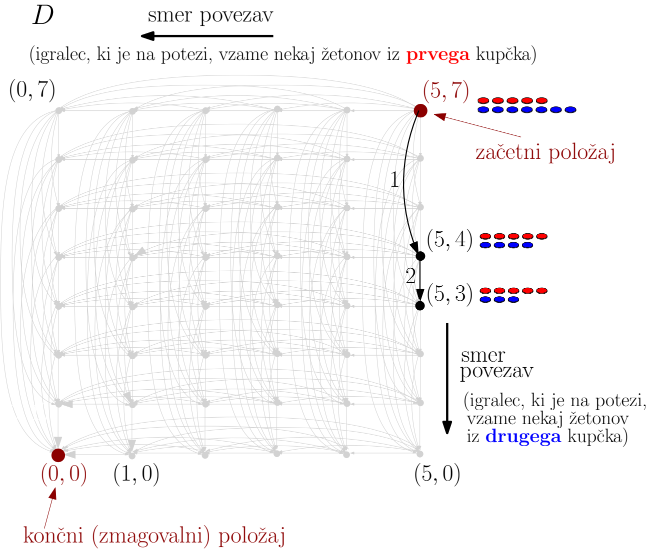
Zgled: Potek igre kot v prejšnjem zgledu lahko sedaj ponazorimo s potjo v digrafu:



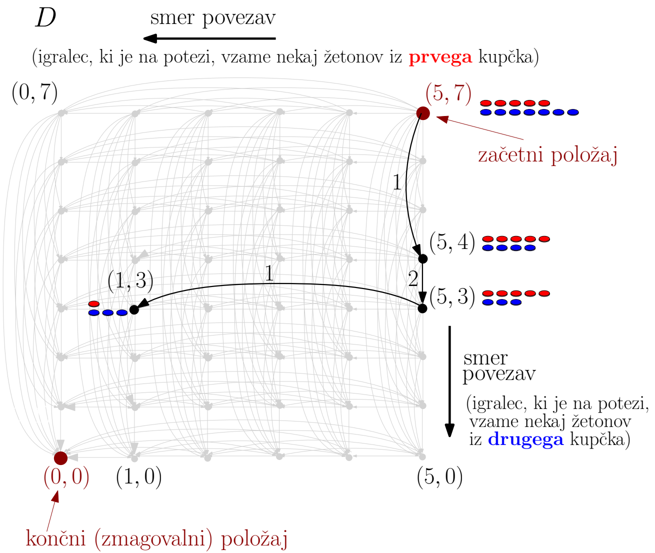
Zgled: Potek igre kot v prejšnjem zgledu lahko sedaj ponazorimo s potjo v digrafu:



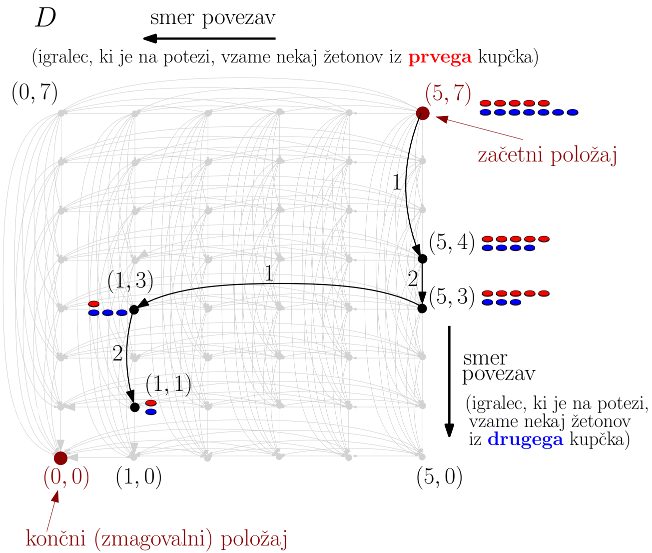
Zgled: Potek igre kot v prejšnjem zgledu lahko sedaj ponazorimo s potjo v digrafu:



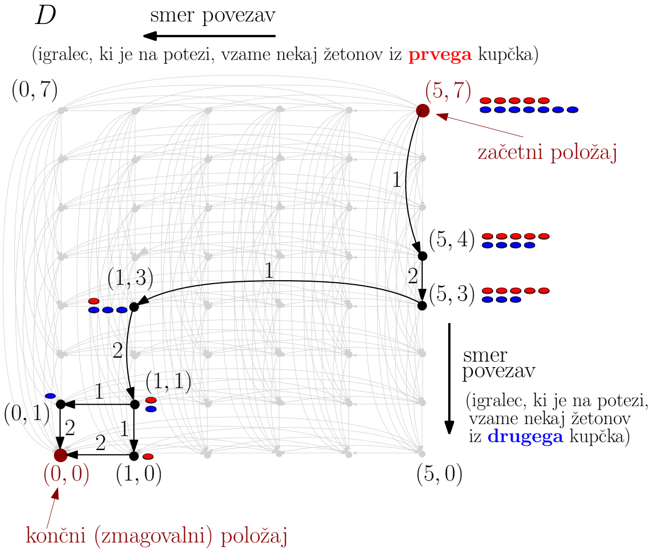
Zgled: Potek igre kot v prejšnjem zgledu lahko sedaj ponazorimo s potjo v digrafu:



Zgled: Potek igre kot v prejšnjem zgledu lahko sedaj ponazorimo s potjo v digrafu:



Zgled: Potek igre kot v prejšnjem zgledu lahko sedaj ponazorimo s potjo v digrafu:



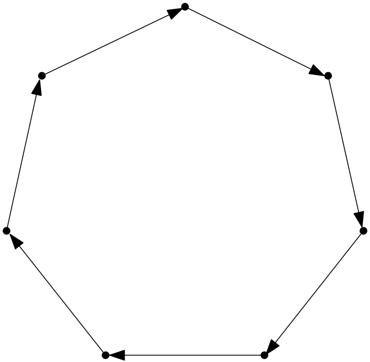
Definicija

Jedro *v digrafu D je poljubna množica $S \subseteq V(D)$, za katero velja:*

(i) *S ne inducira nobenih povezav (tj., nobena točka v S nima naslednika v S),*

(ii) *vsaka točka izven S ima naslednika v S.*

Zgled: Lihi usmerjeni cikli nimajo jedra:



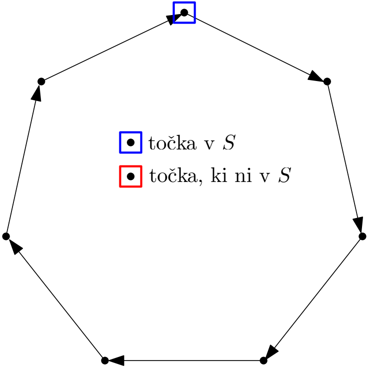
Definicija

Jedro *v digrafu D je poljubna množica $S \subseteq V(D)$, za katero velja:*

(i) *S ne inducira nobenih povezav (tj., nobena točka v S nima naslednika v S),*

(ii) *vsaka točka izven S ima naslednika v S.*

Zgled: Lihi usmerjeni cikli nimajo jedra:



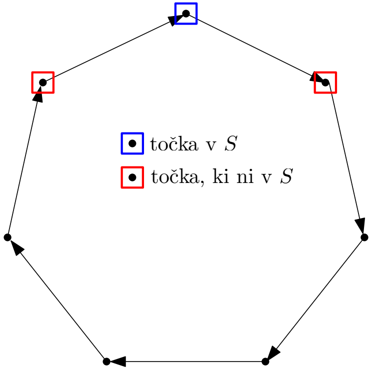
Definicija

Jedro *v digrafu D je poljubna množica $S \subseteq V(D)$, za katero velja:*

(i) *S ne inducira nobenih povezav (tj., nobena točka v S nima naslednika v S),*

(ii) *vsaka točka izven S ima naslednika v S.*

Zgled: Lihi usmerjeni cikli nimajo jedra:



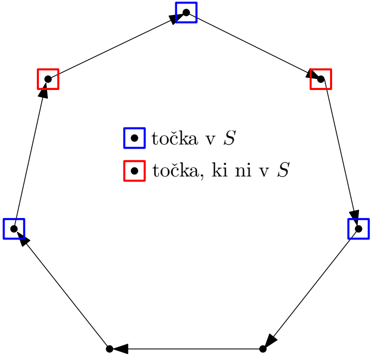
Definicija

Jedro *v digrafu D je poljubna množica $S \subseteq V(D)$, za katero velja:*

(i) *S ne inducira nobenih povezav (tj., nobena točka v S nima naslednika v S),*

(ii) *vsaka točka izven S ima naslednika v S.*

Zgled: Lihi usmerjeni cikli nimajo jedra:



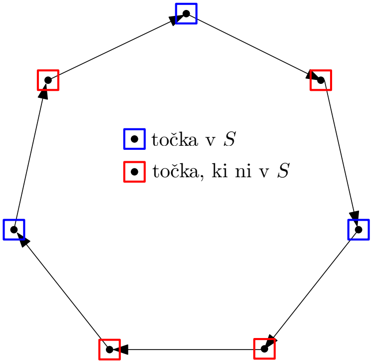
Definicija

Jedro *v digrafu D je poljubna množica $S \subseteq V(D)$, za katero velja:*

(i) *S ne inducira nobenih povezav (tj., nobena točka v S nima naslednika v S),*

(ii) *vsaka točka izven S ima naslednika v S.*

Zgled: Lihi usmerjeni cikli nimajo jedra:



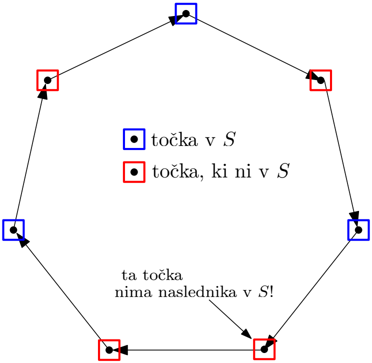
Definicija

Jedro *v digrafu D je poljubna množica $S \subseteq V(D)$, za katero velja:*

(i) *S ne inducira nobenih povezav (tj., nobena točka v S nima naslednika v S),*

(ii) *vsaka točka izven S ima naslednika v S.*

Zgled: Lihi usmerjeni cikli nimajo jedra:



Definicija

Jedro *v digrafu D je poljubna množica $S \subseteq V(D)$, za katero velja:*

(i) *S ne inducira nobenih povezav (tj., nobena točka v S nima naslednika v S),*

(ii) *vsaka točka izven S ima naslednika v S.*

Izrek (Richardson, 1946)

Vsak digraf brez induciranih lihih usmerjenih ciklov ima jedro.

(Lih usmerjen cikel je *induciran*, če ga lahko dobimo z brisanjem nič ali več točk (in z njimi incidenčnih usmerjenih povezav).)

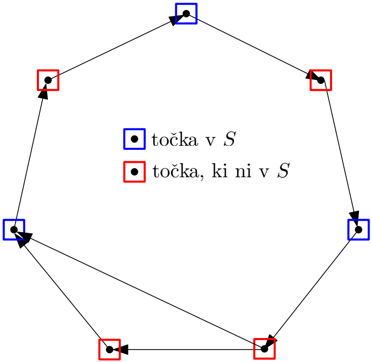
Definicija

Jedro *v digrafu D je poljubna množica $S \subseteq V(D)$, za katero velja:*

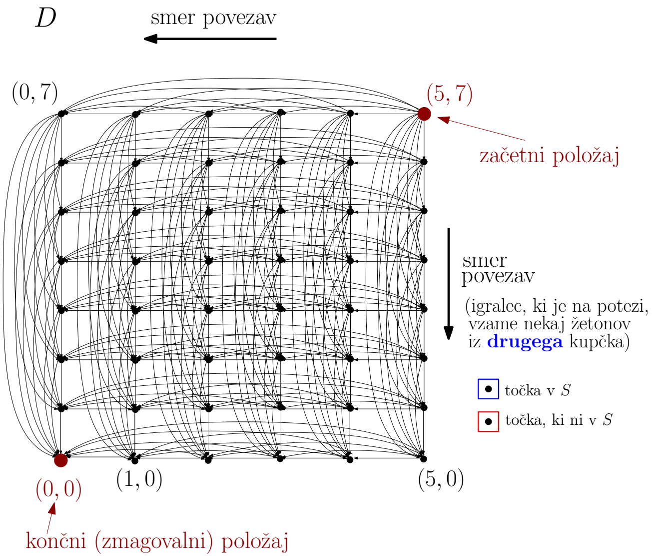
(i) *S ne inducira nobenih povezav (tj., nobena točka v S nima naslednika v S),*

(ii) *vsaka točka izven S ima naslednika v S.*

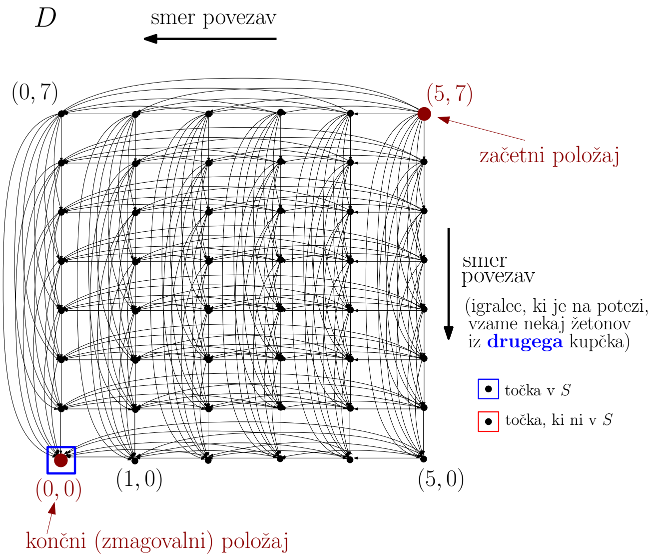
Zgled: Digraf z jedrom S:



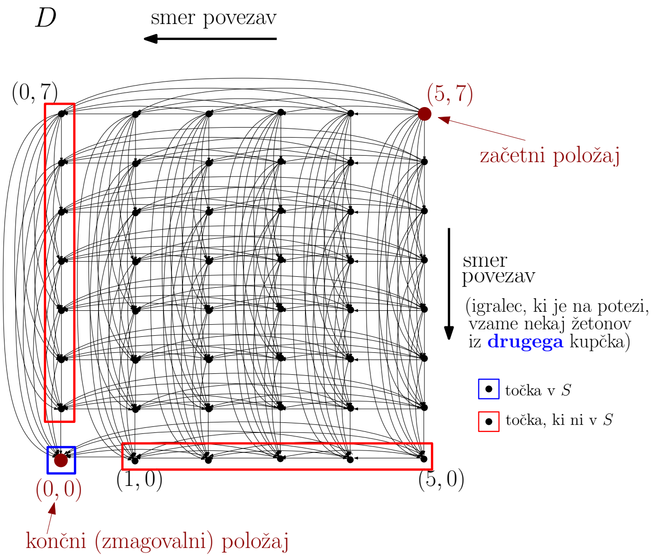
Digraf igre Nim je acikličen. Torej ima jedro. Poiščimo ga!



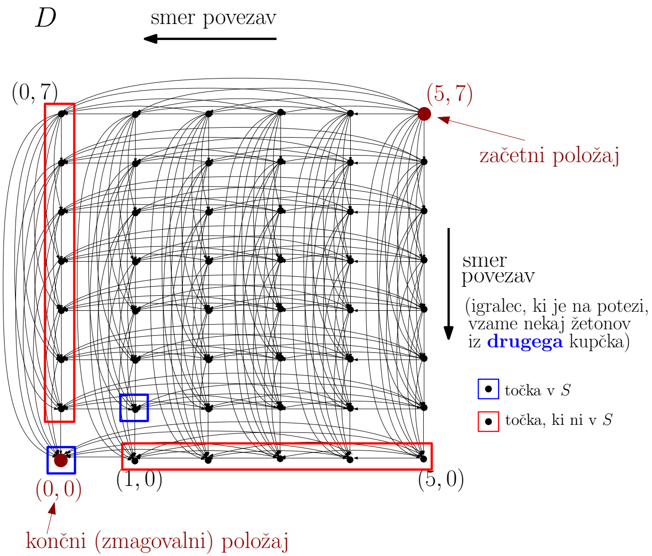
Digraf igre Nim je acikličen. Torej ima jedro. Poiščimo ga!



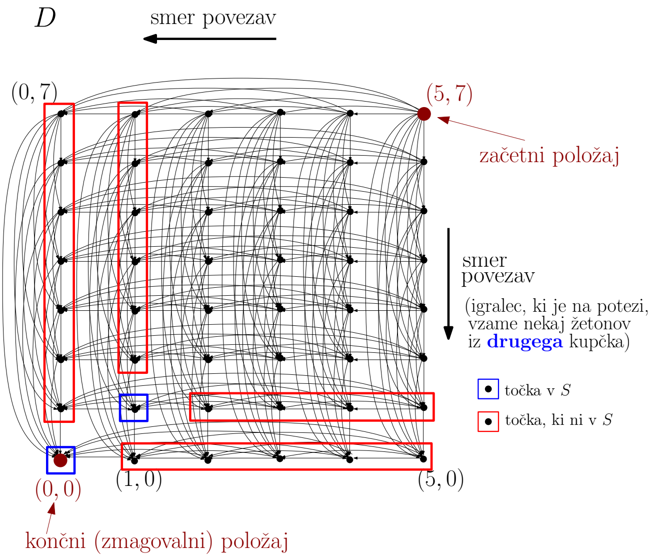
Digraf igre Nim je acikličen. Torej ima jedro. Poiščimo ga!



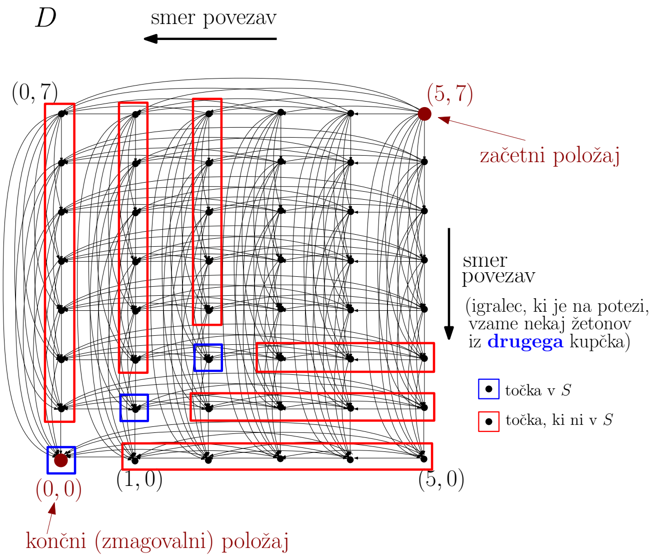
Digraf igre Nim je acikličen. Torej ima jedro. Poiščimo ga!



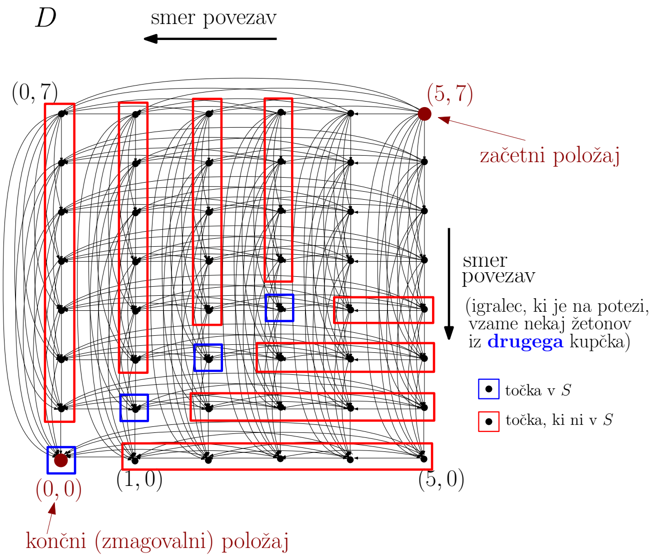
Digraf igre Nim je acikličen. Torej ima jedro. Poiščimo ga!



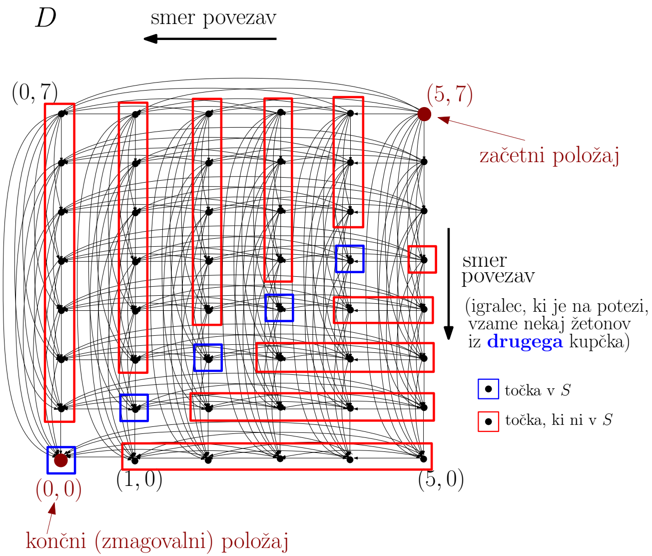
Digraf igre Nim je acikličen. Torej ima jedro. Poiščimo ga!



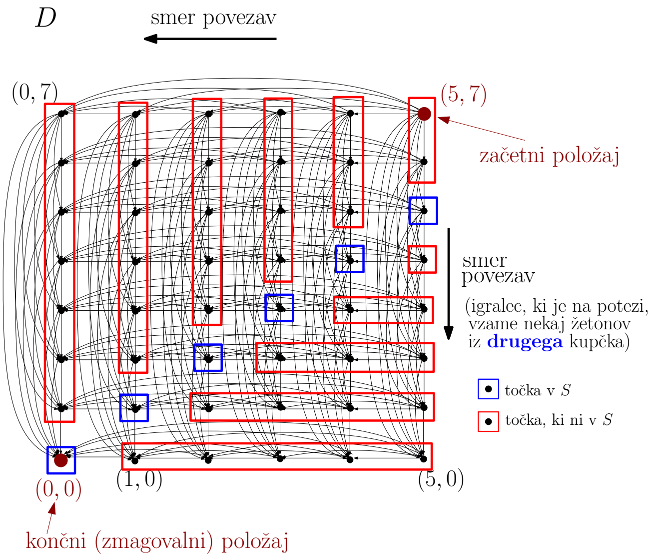
Digraf igre Nim je acikličen. Torej ima jedro. Poiščimo ga!



Digraf igre Nim je acikličen. Torej ima jedro. Poiščimo ga!



Digraf igre Nim je acikličen. Torej ima jedro. Poiščimo ga!



Kako je jedro lahko uporabno v analizi iger?

Naj bo D digraf, ki predstavlja poteze neke igre, z množico zmagovalnih položajev Z.

Recimo, da je S jedro, ki vsebuje Z.

Če predpostavimo, da oba igralca igrata optimalno, potem:

- bo igralec, ki lahko naredi potezo, ki vodi v nek položaj v jedru, **zmagal**,
- igralec, ki mora odigrati potezo iz nekega položaja v jedru, **izgubil**.

V primeru igre Nim smo našli jedro, ki vsebuje edini zmagovalen položaj, točko $(0,0)$.

To je bila množica $\{(0,0),(1,1),\ldots,(5,5)\}$.

Kaj pa v splošnem?

V primeru r in $s \geq r$ žetonov na kupčkih pa velja:

Množica
$$S = \{(i,i) \mid 0 \leq i \leq r\}$$
je jedro, ki vsebuje množico $Z = \{(0,0)\}$ zmagovalnih položajev.

Sledi:

- če je $r = s$, potem ima drugi igralec zmagovalno strategijo
- če je $r < s$, potem ima prvi igralec zmagovalno strategijo

V obeh primerih je zmagovalna strategija ista!

"Napravi poljubno potezo, ki vodi v jedro."
$=$ *"Napravi poljubno potezo, ki bo izenačila velikosti kupčkov."*

Naloga:
S pomočjo jeder v digrafih poišči zmagovalno strategijo v igri, pri kateri dva igralca iz začetnega kupčka 10 domin izmenično jemljeta po eno ali dve, zmaga pa tisti, ki vzame zadnjo domino!